NOM :
6D
Maths/4périodes
H. Bachtsevanos

CS n°9
Géométrie analytique de l'espace

28/04/2011

C3 : "Résoudre un problème" / 30

C3. 1. On considère 3 plans $\alpha \equiv 2x + 5y - 2z + 1 = 0$, $\beta \equiv x - 5y + 2z - 1 = 0$ et $\gamma \equiv x + y - z - 1 = 0$.
Détermine l'intersection de ces 3 plans par résolution d'un système dont tu préciseras et interpréteras clairement la solution.

2. On considère 3 plans $\alpha \equiv 2x - 5y + 3 = 0$, $\beta \equiv 3x + 2z + 4 = 0$ et $\gamma \equiv -4x + 10y - 6 = 0$.
Détermine l'intersection de ces 3 plans par résolution d'un système dont tu préciseras et interpréteras clairement la solution.

3. Calcule la distance du point $I(2; 5; -1)$ à la droite

$$d \equiv \begin{cases} x + 2y = 1 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

Schématise précisément la situation et montre clairement la démarche suivie.

4. Donne, de façon la plus complète possible, la marche à suivre qui te permettrait de déterminer l'équation de la sphère Γ de centre $C(x_C; y_C; z_C)$ tangente au plan $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$.
Accompagne tes explications d'un schéma.

Géométrie analytique de l'espace   CS9

/71

C3. 1. /10 $\alpha \cap \beta \cap \gamma$?

$$\begin{array}{l|c|c|}
 & *_1 & *_2 \\
\left\{\begin{array}{l} 2x+5y-2z+1=0 \\ x-5y+2z-1=0 \\ x+y-z-1=0 \end{array}\right. & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \end{array} & \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}
\end{array}$$

$*_1$
$$\begin{array}{r} 2x+5y-2z+1=0 \\ +\ (x-5y+2z-1=0) \\ \hline 3x=0 \\ x=0 \end{array}$$
/2

$*_2$
$$\begin{array}{r} x-5y+2z-1=0 \\ +\ (2x+2y-2z-2=0) \\ \hline 3x-3y-3=0 \\ -3y-3=0 \\ y=-1 \end{array}$$
/2

Dès lors, $z = x+y-1 = 0-1-1 = -2$ /2

$S = \{(0;-1;-2)\}$ /2 et l'intersection des 3 plans α, β et γ est un point. /2

2. /13

$$\begin{array}{l|c}
 & *_1 \\
\left\{\begin{array}{l} 2x-5y+3=0 \\ 3x+2z+4=0 \\ -4x+10y-6=0 \end{array}\right. & \begin{array}{c} 2 \\ \\ 1 \end{array}
\end{array}$$

$*_1$
$$\begin{array}{r} 4x-10y+6=0 \\ +\ (-4x+10y-6=0) \\ \hline 0x+0y=0 \end{array}$$
/2

$\rightarrow$ le système se réduit à

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-5y+3=0 \\ 3x+2z+4=0 \end{array}\right.$$

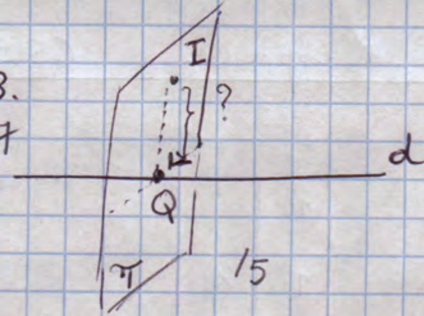
Il s'agit des éq. cartésiennes d'une droite $\rightarrow$ on en écrit les éq. paramétriques

$$\left\{\begin{array}{l} x=K \\ \hookrightarrow 2K-5y+3=0 \\ \hookrightarrow 3K+2z+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=K \\ y=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}K \\ z=-2-\frac{3}{2}K \end{array}\right.$$
/6

$S = \left\{\left(K;\ \frac{3}{5}+\frac{2}{5}K;\ -2-\frac{3}{2}K\right),\ K\in\mathbb{R}\right\}$ /3

Le système est simplement indéterminé et l'intersection des 3 plans α, β et γ est une droite. /2

3. /27



/5

1°) On cherche l'éq. du plan $\pi \perp d$ /9 et tel que $I \in \pi$ /2

$\longrightarrow \quad d \equiv \begin{cases} x + 2y = 1 \\ y - z = 2 \end{cases}$

$\Leftarrow, \quad y = K \rightarrow x = 1 - 2K$
$\qquad\qquad\qquad\quad z = K - 2$

Et, les éq. par. de d sont
$\begin{cases} x = 1 - 2K \\ y = K \\ z = K - 2 \end{cases}$ /3

$\longrightarrow (-2; 1; 1)$ est un vect. dir. de d et donc un vect. normal du plan π

Dès lors, $\pi \equiv -2x + y + z + d = 0$ /2

Or, $I(2; 5; -1) \in \pi \Rightarrow -4 + 5 - 1 + d = 0$
$d = 0$ /2

Et, $\pi \equiv -2x + y + z = 0$

2°) On cherche $Q = \pi \cap d$ /2
/7

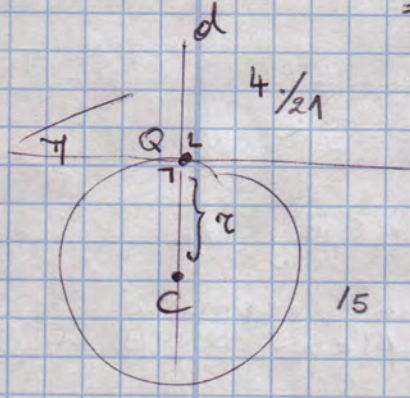
$\left\{\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 - 2K \\ y = K \\ z = K - 2 \end{cases} \\ -2x + y + z = 0 \end{array}\right. \longrightarrow -2 + 4K + K + K - 2 = 0$
$6K = 4$
$K = 2/3$ /2

$\begin{cases} x = 1 - 2 \cdot \frac{2}{3} = -1/3 \\ y = 2/3 \\ z = 2/3 - 2 = -4/3 \end{cases}$

Et, $Q\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{4}{3}\right)$ /3

3°) $d(d; I) = d(I; Q) = \overline{IQ} = \sqrt{\left(-\frac{1}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 5\right)^2 + \left(\frac{-4}{3} + 1\right)^2}$ /2 /2
/6
$= \sqrt{\frac{49}{9} + \frac{169}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{219}{9}} \simeq 4,933$ u.l. /2

4. /21



/5

1°) On cherche le rayon de la sphère. Pour cela,

a) on détermine l'éq. de la droite /6 $d \perp \pi$, telle que $C \in d$. /2
Pour ce faire, on sait que $(a; b; c)$ est un vect. normal à π et donc un vect. dir. de d. /2
Dès lors, $d \equiv \begin{cases} x = x_C + aK \\ y = y_C + bK \\ z = z_C + cK \end{cases}$ /2

b) On détermine l'intersection /3 entre la dte d et le plan π par résolution d'un système.
On trouve le pt $Q = \pi \cap d$

c) Le rayon de la sphère est $r = \overline{QC} = \sqrt{(x_C - x_Q)^2 + (y_C - y_Q)^2 + (z_C - z_Q)^2}$
/3

2°) $\Gamma \equiv (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 = r^2$