GEOMETRIE ANALYTIQUE DE L'ESPACE

1. Coordonnées de points et composantes de vecteurs

1.1 Coordonnées d'un point de l'espace

On suppose l'espace rapporté à trois axes perpendiculaires.
Un point de l'espace est repéré par trois nombres qui constituent ses coordonnées.

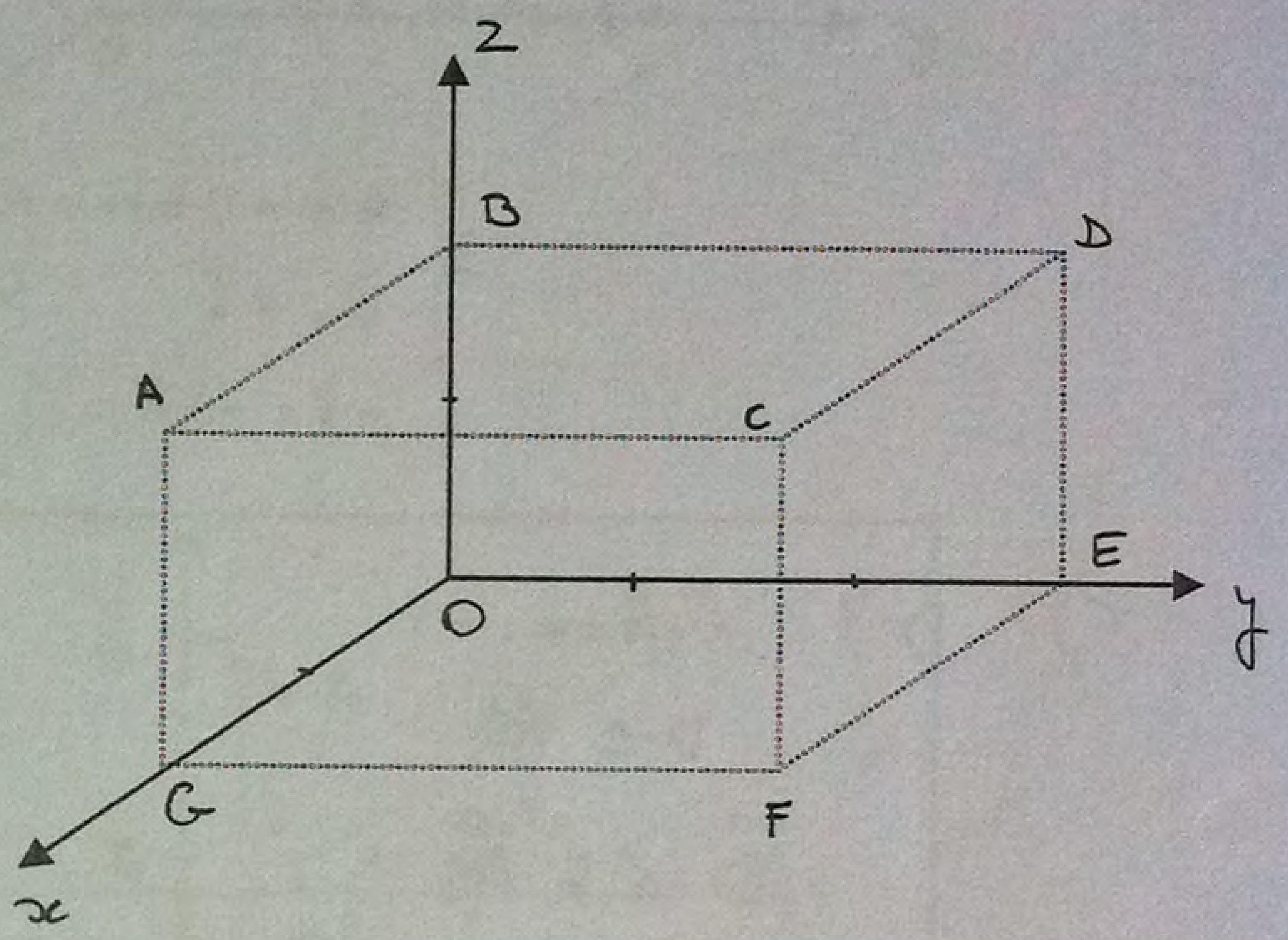
$O = (0, 0, 0)$ $A = (2, 0, 2)$ $B = (0, 0, 2)$ $C = (2, 3, 2)$
$D = (0, 3, 2)$ $E = (0, 3, 0)$ $F = (2, 3, 0)$ $G = (2, 0, 0)$

Ainsi pour trouver $C = (2, 3, 2)$

On mène par C un plan parallèle au plan (Y,Z).
Ce plan coupe l'axe X à distance 2 du point O.
Ce nombre 2 sera **l'abscisse de C.**

On mène par C un plan parallèle au plan (X,Z).
Ce plan coupe l'axe Y à distance 3 du point O.
Ce nombre 3 sera **l'ordonnée de C.**

On mène par C un plan parallèle au plan (X,Y).
Ce plan coupe l'axe Z à distance 2 du point O.
Ce nombre 2 sera **la cote de C.**



1.2 Vecteurs de l'espace

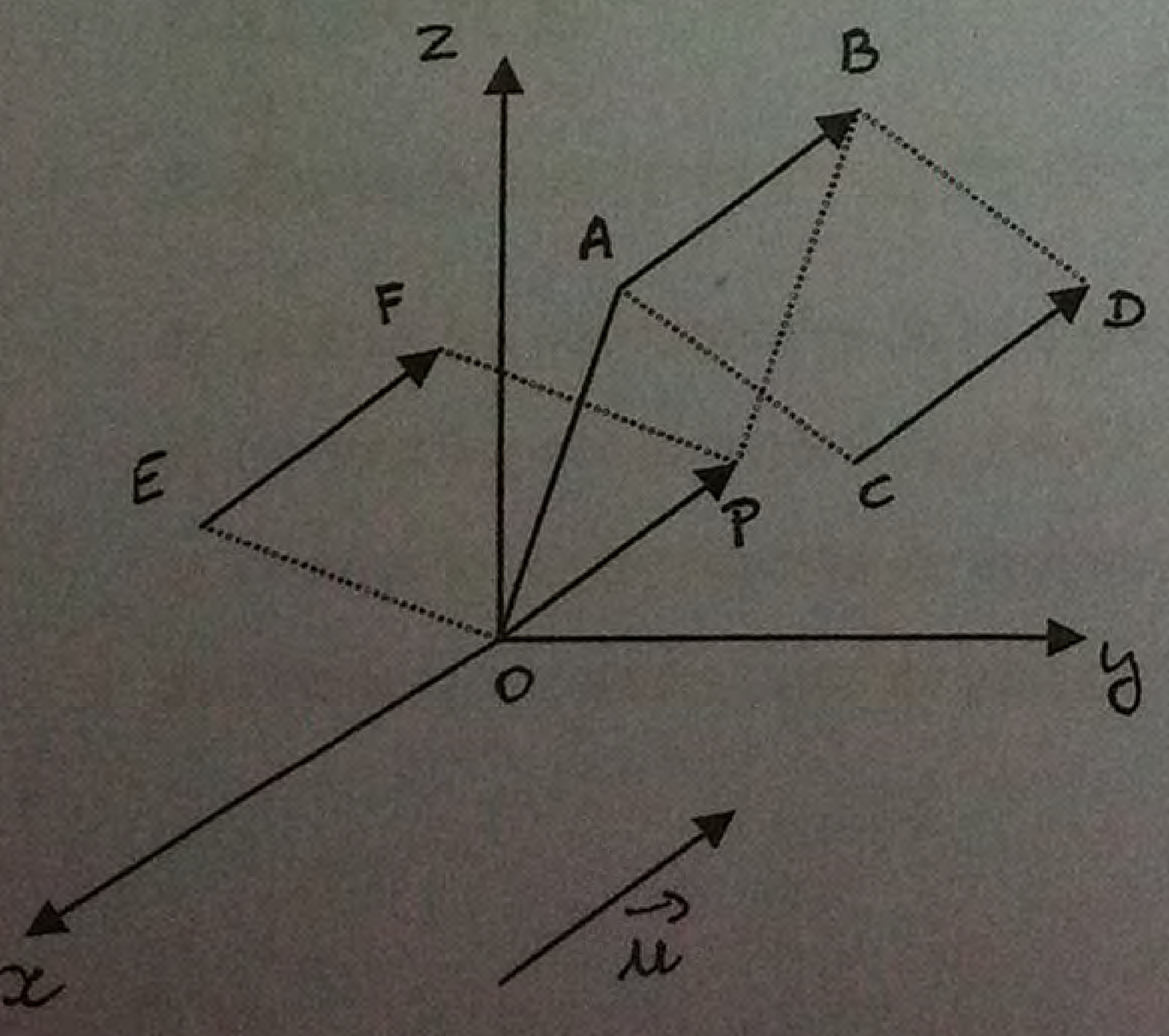
Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ exprime la variation de position lors d'un déplacement du point A au point B sous l'effet de la translation qui applique A sur B.

Pour aller de A vers B, il faut effectuer un trajet d'une certaine longueur (la distance $\overline{AB}$), dans une certaine direction (celle des droites parallèles à AB) et dans un certain sens (de A vers B).

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donc caractérisé par une longueur, une direction, et un sens.
A est le point origine du vecteur et B est le point extrémité.

Vecteurs égaux

On dira que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, lorsque la variation de position qui conduit de A à B est identique à celle qui conduit de C vers D.



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ **si et seulement si ces vecteurs ont la même longueur, la même direction et le même sens.**

On retiendra encore cette définition équivalente :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

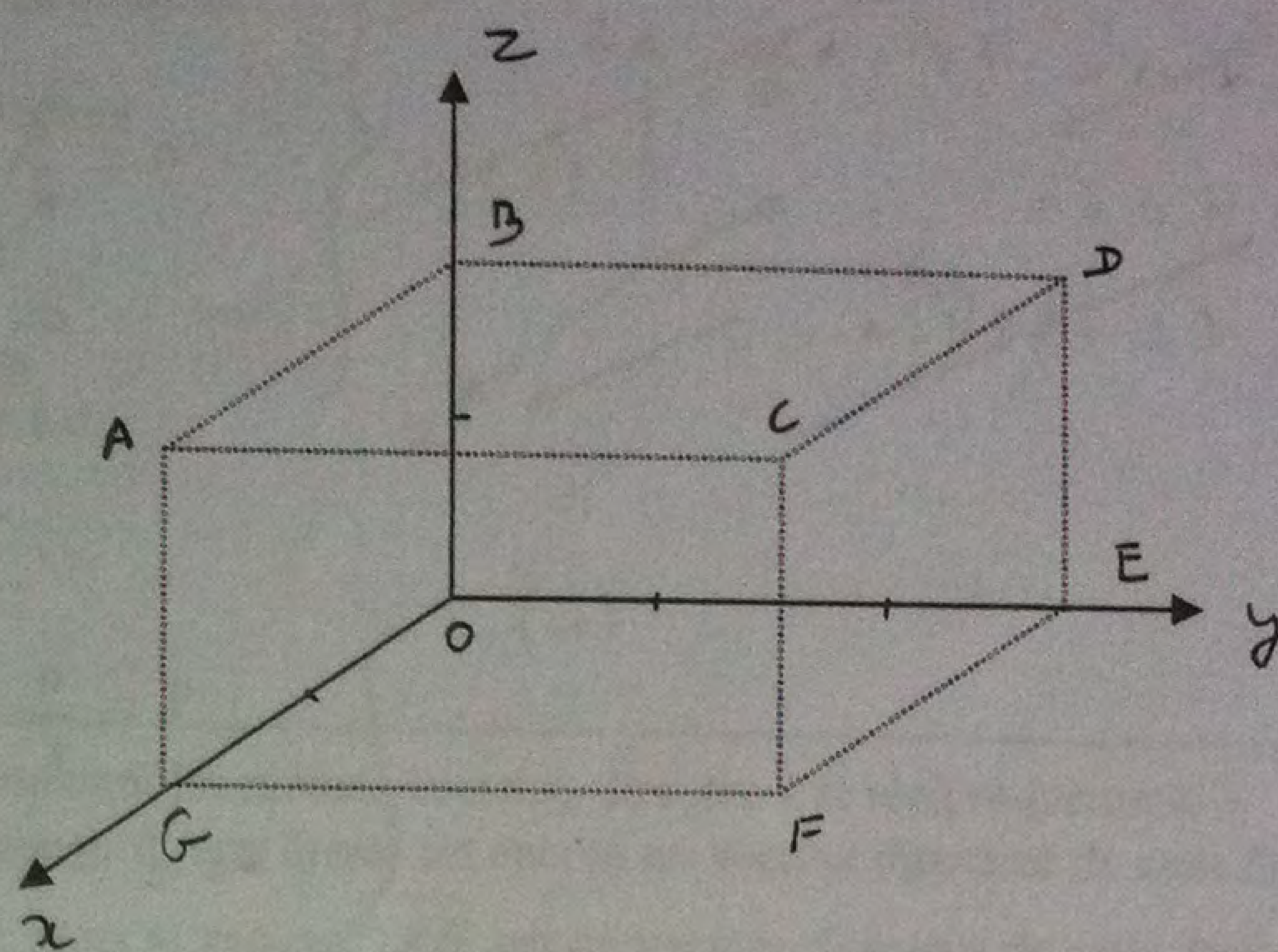
si et seulement si ABDC est un parallélogramme.

Vecteur libre

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}; \overrightarrow{EF}$.....
étant égaux, on peut considérer qu'ils ne sont que des représentants d'un même vecteur noté par une seule lettre $\vec{u}$. On utilisera cette notation si on ne souhaite pas fixer l'origine du vecteur.

1.3 Notion de composantes

Pour se déplacer de G à D, il faut se déplacer
de –2 selon X,
de 3 selon Y et
de 2 selon Z.



Nous dirons que (-2, 3, 2) constituent **les composantes du vecteur $\overrightarrow{GD}$**

$\overrightarrow{GD} = (-2, 3, 2)$

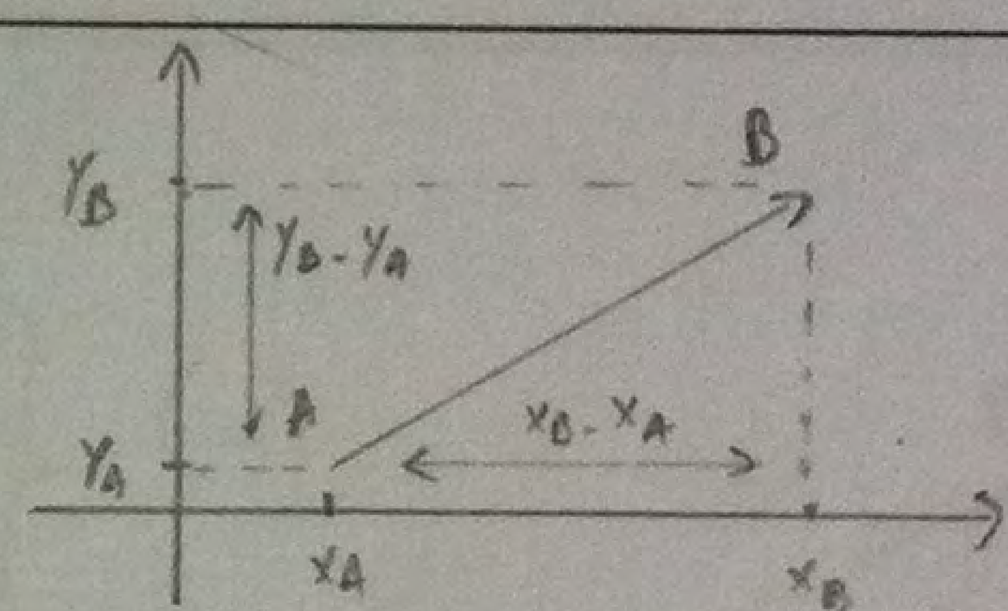
De manière générale si

$A = (x_A, y_A, z_A)$

$B = (x_B, y_B, z_B)$

Les **composantes** du vecteur sont

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$



Deux vecteurs égaux ont les mêmes composantes

et réciproquement, des vecteurs de mêmes composantes sont égaux.

Toute relation reliant des vecteurs reste valable si on remplace les vecteurs par leurs composantes.

Remarque

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Si les composantes du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$ sont (x, y, z)
Alors les coordonnées du point P sont (x, y, z).

EXERCICE

Soient les points A = (1 , -2, 5) B = (-6, 4, 0) C = (5, -2, -1)

a) Donner les coordonnées de M milieu de [A,B]

b) Donner les coordonnées du point R en sachant que $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{AC}$

c) Donner les composantes du vecteur $\vec{u} = 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BC}$

d) Donner les coordonnées du point P en sachant que $\overrightarrow{AP} = \vec{u}$

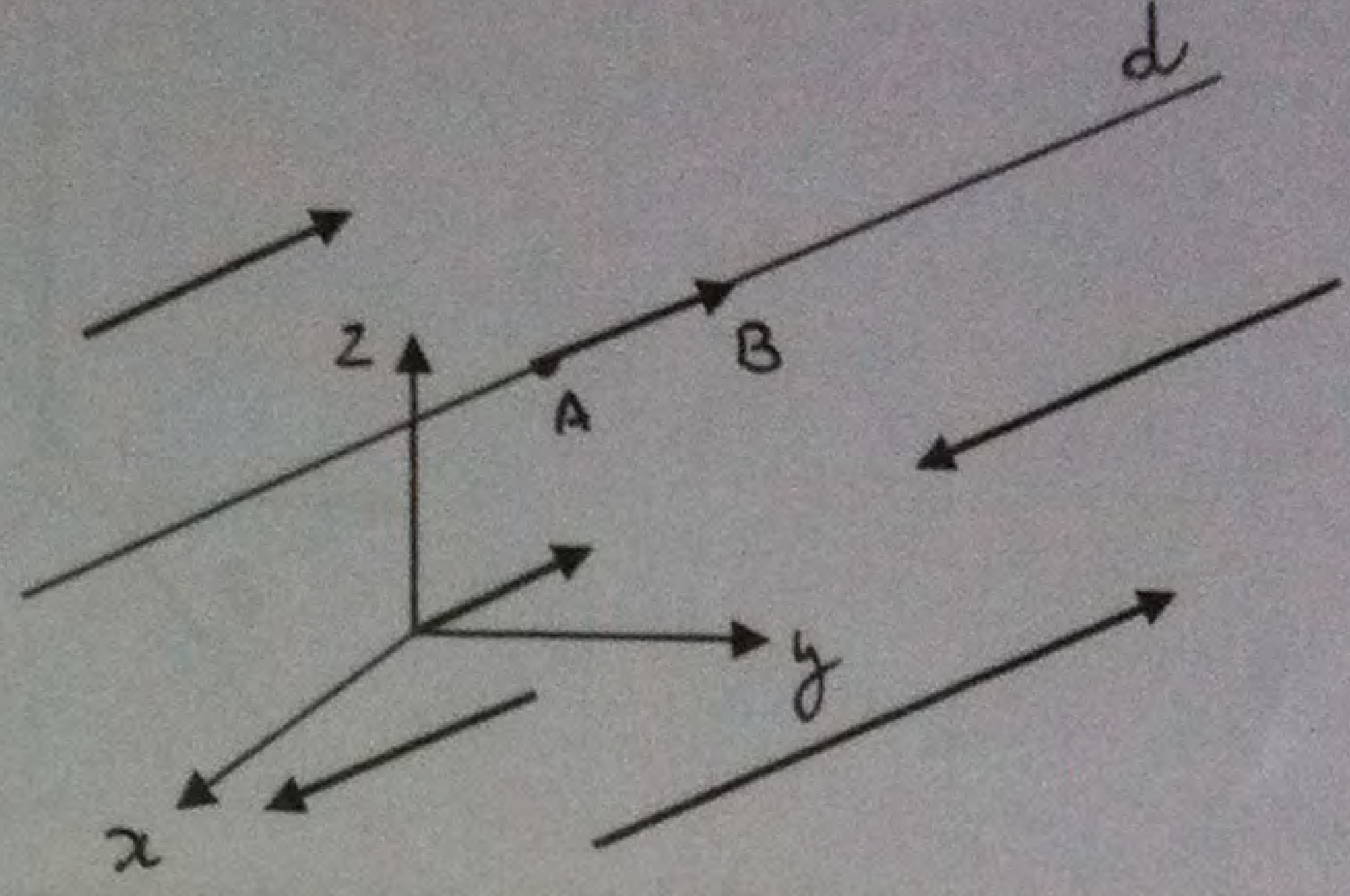
2. Equations paramétriques de droites

2.1 Vecteurs directeurs d'une droite

Soient A et B deux points de la droite d.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ un vecteur qui donne la direction de la droite.

On appelle **vecteur directeur** de la droite d tout vecteur dont la direction est identique à celle de la droite.
Ce vecteur est parallèle à la droite.

Ainsi les vecteurs représentés ici sont des vecteurs directeurs de la droite d et de toute droite parallèle à d.



Propriétés

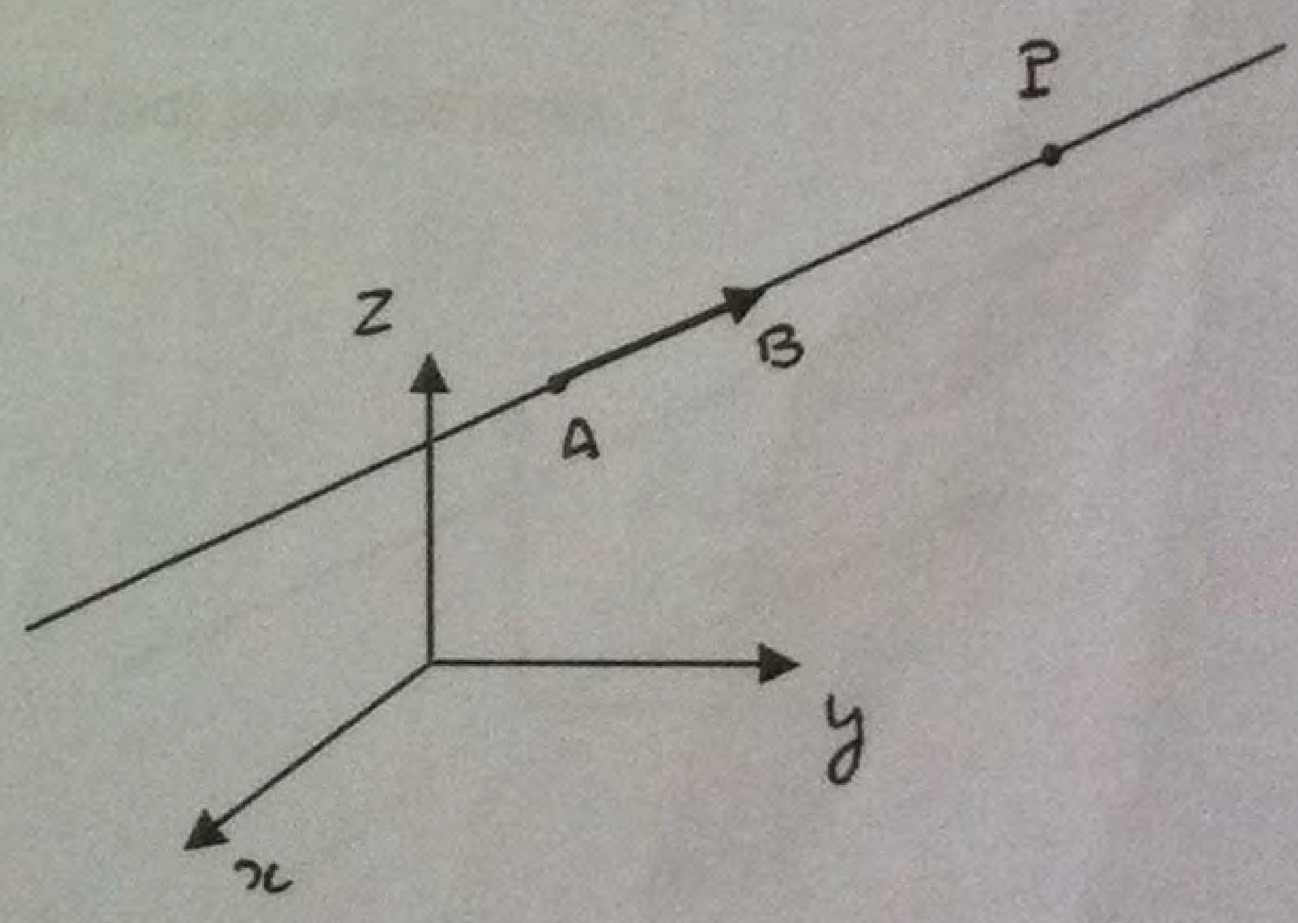
- Si deux droites sont parallèles, elles admettent les mêmes vecteurs directeurs et réciproquement.
- Tout multiple non nul d'un vecteur directeur d' une droite est encore un vecteur directeur de cette droite.
- Si A et B sont deux points d'une droite, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de cette droite et de toute droite parallèle à cette droite

2.2 Droite passant par deux points

2.2.1 Relation vectorielle

Considérons la droite AB avec
$A=(x_A, y_A, z_A)$
$B=(x_B, y_B, z_B)$
Soit $P=(x,y,z)$ un point quelconque de cette droite.
On peut écrire la relation vectorielle :

$$\boxed{\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}}$$



2.2.2 Relations paramétriques

Si on remplace les vecteurs par leurs composantes, il vient

$$(x-x_A, y-y_A, z-z_A) = k\,(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

Ce qui peut encore s'écrire

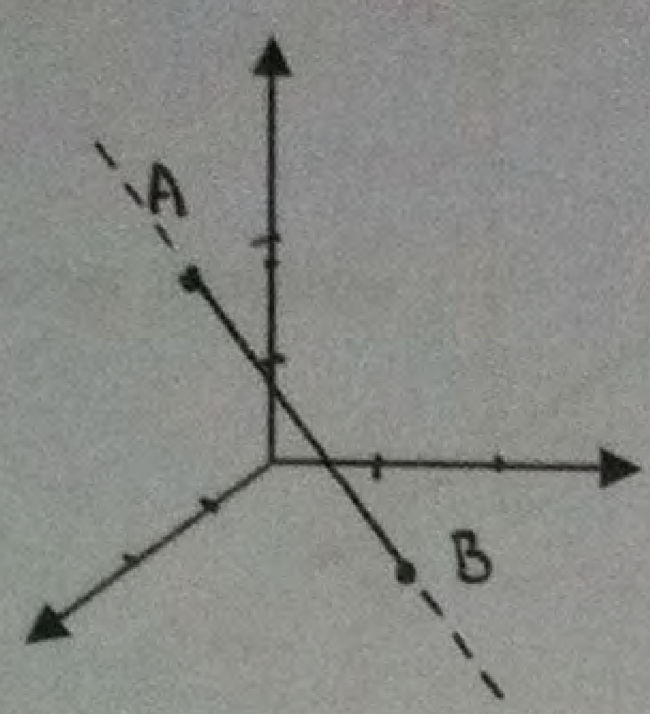
$$\begin{cases} x - x_A = k(x_B - x_A) \\ y - y_A = k(y_B - y_A) \\ z - z_A = k(z_B - z_A) \end{cases}$$ et finalement $$\boxed{AB \equiv \begin{cases} x = x_A + k(x_B - x_A) \\ y = y_A + k(y_B - y_A) \\ z = z_A + k(z_B - z_A) \end{cases}}$$

Ces relations constituent un système d'équations paramétriques de la droite AB

Exemple Soient A = (1 ; 0 ; 2) et B = (2 ; 2 : 0)

Les équations paramétriques de la droite AB sont

$$AB \equiv \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2k \\ z = 2 - 2k \end{cases}$$



Pour chaque valeur réelle donnée au paramètre k, on obtient les coordonnées d'un point de la droite.
Ainsi :

- Si k = 0 on obtient le point A = (1 ; 0 ; 2)
- Si k = 1 on obtient le point B = (2 ; 2 ; 0)
- Si k = 2 on obtient le point (3 ; 6 ; -2)
- Si k = -1 on obtient le point (0 ; -2 ; 4)

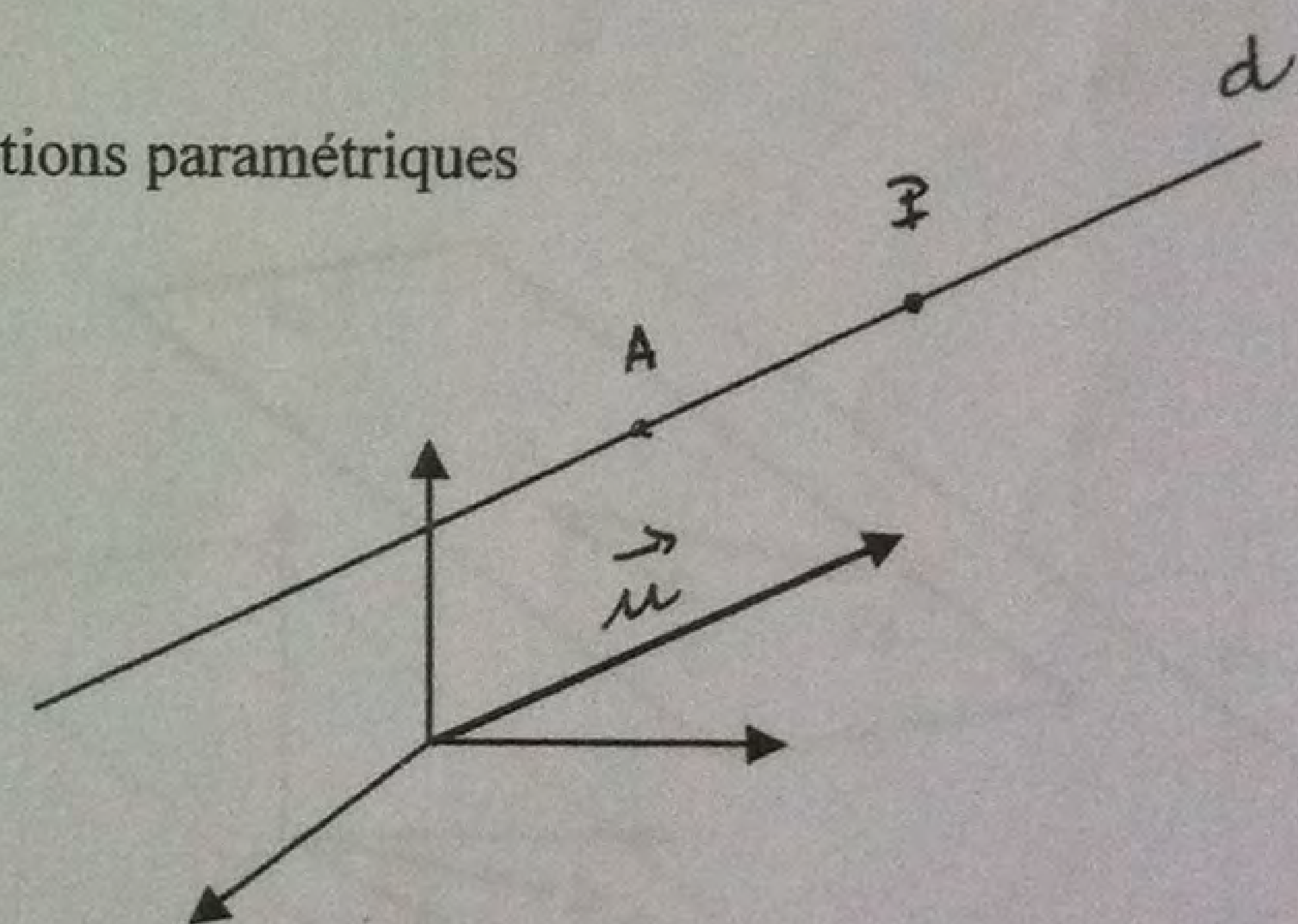
2.3 Droite passant par un point et de vecteur directeur donné

Equation d'une droite d passant par le point $A = (x_A, y_A, z_A)$

et de vecteur directeur $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$

La relation vectorielle $\overrightarrow{AP} = k\vec{u}$ nous conduit au système d'équations paramétriques

$$\boxed{d \equiv \begin{cases} x = x_A + k u_1 \\ y = y_A + k u_2 \\ z = z_A + k u_3 \end{cases}}$$



EXERCICES

1. a) Donner les coordonnées de deux points de l'axe X ; de l'axe Y ; de l'axe Z.
   b) En déduire les composantes d'un vecteur directeur de l'axe X ; de l'axe Y ; de l'axe Z.

2. a) Donner les coordonnées de trois points du formé par l'axe X et l'axe Y; par l'axe Y et l'axe Z ; par l'axe X et l'axe Z.
   b) En déduire les composantes de deux vecteurs directeurs du plan formé par l'axe X et l'axe Y; par l'axe Y et l'axe Z ; par l'axe X et l'axe Z.

3. Donner un système d'équations paramétriques de la droite passant par A = (-1 ; 0 – 5) et B = (2 ; -5 ; 4)

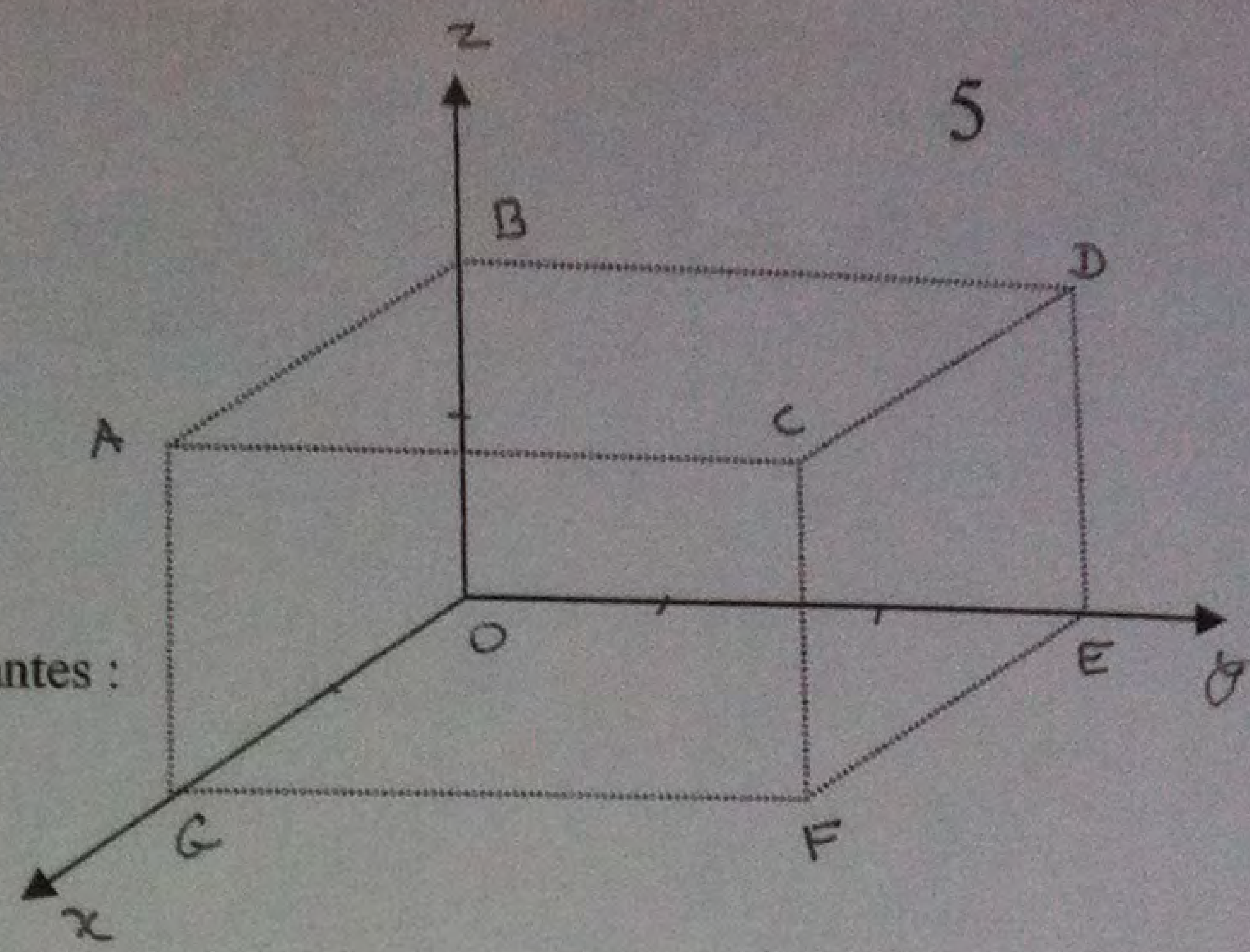
4. Soient les points A = (1 ; 2 ; -3) B = (-2 ; 1 ; 1) et C = (0 ; 3 ; 2)
   Donner un système d'équations paramétriques de
   - La droite AB
   - La droite d passant par C et parallèle à AB
   - La droite d' passant par l'origine des axes et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$

5. Soient les points

O = (0, 0, 0) A = (2 ,0 ,2) B = (0, 0, 2) C = (2 ,3, 2)
D = (0, 3, 2) E = (0, 3, 0) F = (2, 3, 0) G = (2, 0, 0)
M le milieu de [A ; F]
N le milieu de [M ; E]

Donner un système d'équations paramétriques des droites suivantes :

- OA ; AB ; CF ; GD
- l'axe X ; l'axe Y ; l'axe Z
- ME ; NB ; MN



6. On donne A = (-2 ; 0 ; 1) et B (1 ; 2 ; 3). Calculer les coordonnées du point de la droite AB dont

- L'ordonnée est -2
- L'abscisse est l'opposée de la cote.

7. Donner un système d'équations paramétriques de la droite passant par le point (7 , -2 , 0) et parallèle à la droite suivante

$$d \equiv \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 - k \\ z = 1 + 3k \end{cases}$$

3. Equations paramétriques de plans

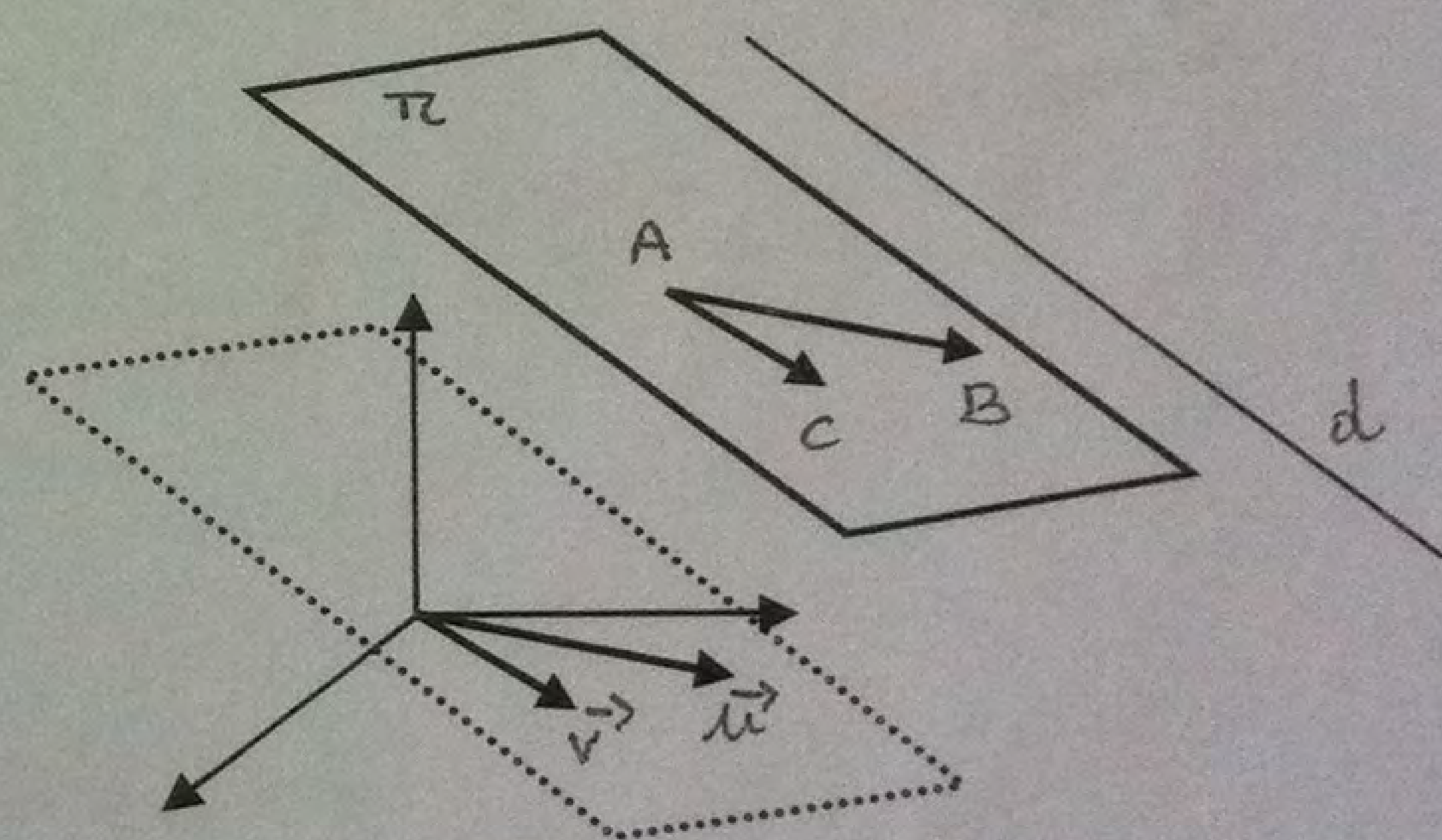
3.1 Vecteurs directeurs d'un plan

Soient A, B et C trois points non alignés du plan π .

Pour déterminer la direction d'un plan, il faut disposer de deux vecteurs formant entre eux un angle non nul. Chaque vecteur est parallèle au plan.

Ces vecteurs constituent **un couple de vecteurs directeurs** du plan.

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ainsi que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs du plan π et de tout plan parallèle à π .



Propriétés

- Si deux plans sont parallèles, ils admettent les mêmes vecteurs directeurs et réciproquement.
- Tout multiple non nul d'un vecteur directeur d'un plan est encore un vecteur directeur de ce plan.
- Si A et B sont deux points d'un plan, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de ce plan et de tout plan parallèle à ce plan.
- Une droite d et un plan π sont parallèles si un vecteur directeur de la droite est aussi un vecteur directeur du plan.

3.2 Plan passant par trois points

3.2.1 Relation vectorielle

Soient A, B et C trois points non alignés du plan π .

$A=(x_A,y_A,z_A)$ $B=(x_B,y_B,z_B)$ $C=(x_C,y_C,z_C)$

Soit $P=(x,y,z)$ un point quelconque du plan π .

On peut écrire la relation vectorielle :

$$\boxed{\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}}$$

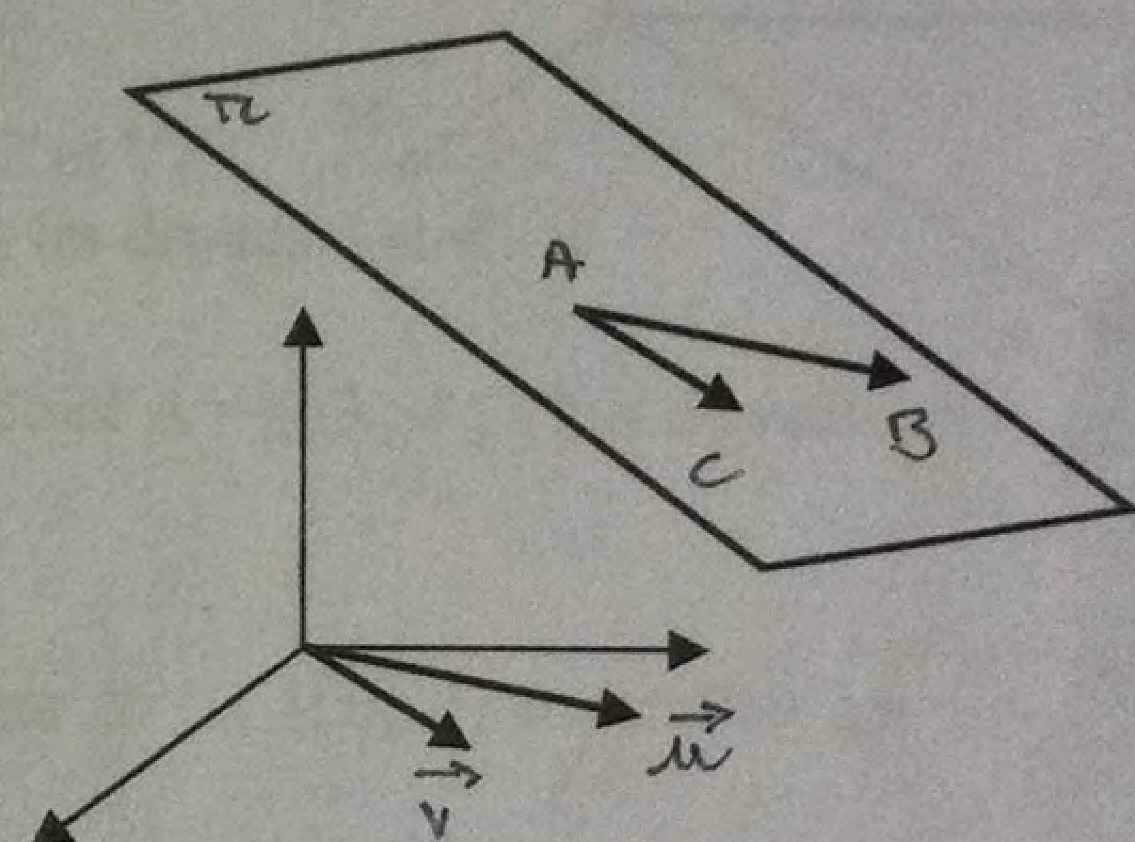
3.2.2 Relations paramétriques

Si on remplace les vecteurs par leurs composantes, il vient

$$(x-x_A,y-y_A,z-z_A)=\alpha\,(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)+\beta(x_C-x_A,y_C-y_A,z_C-z_A)$$

Ce qui peut encore s'écrire

$$\begin{cases} x-x_A=\alpha(x_B-x_A)+\beta(x_C-x_A) \\ y-y_A=\alpha(y_B-y_A)+\beta(y_C-y_A) \\ z-z_A=\alpha(z_B-z_A)+\beta(z_C-z_A) \end{cases}$$



et finalement

$$\pi\equiv\begin{cases} x=x_A+\alpha(x_B-x_A)+\beta(x_C-x_A) \\ y=y_A+\alpha(y_B-y_A)+\beta(y_C-y_A) \\ z=z_A+\alpha(z_B-z_A)+\beta(z_C-z_A) \end{cases}$$

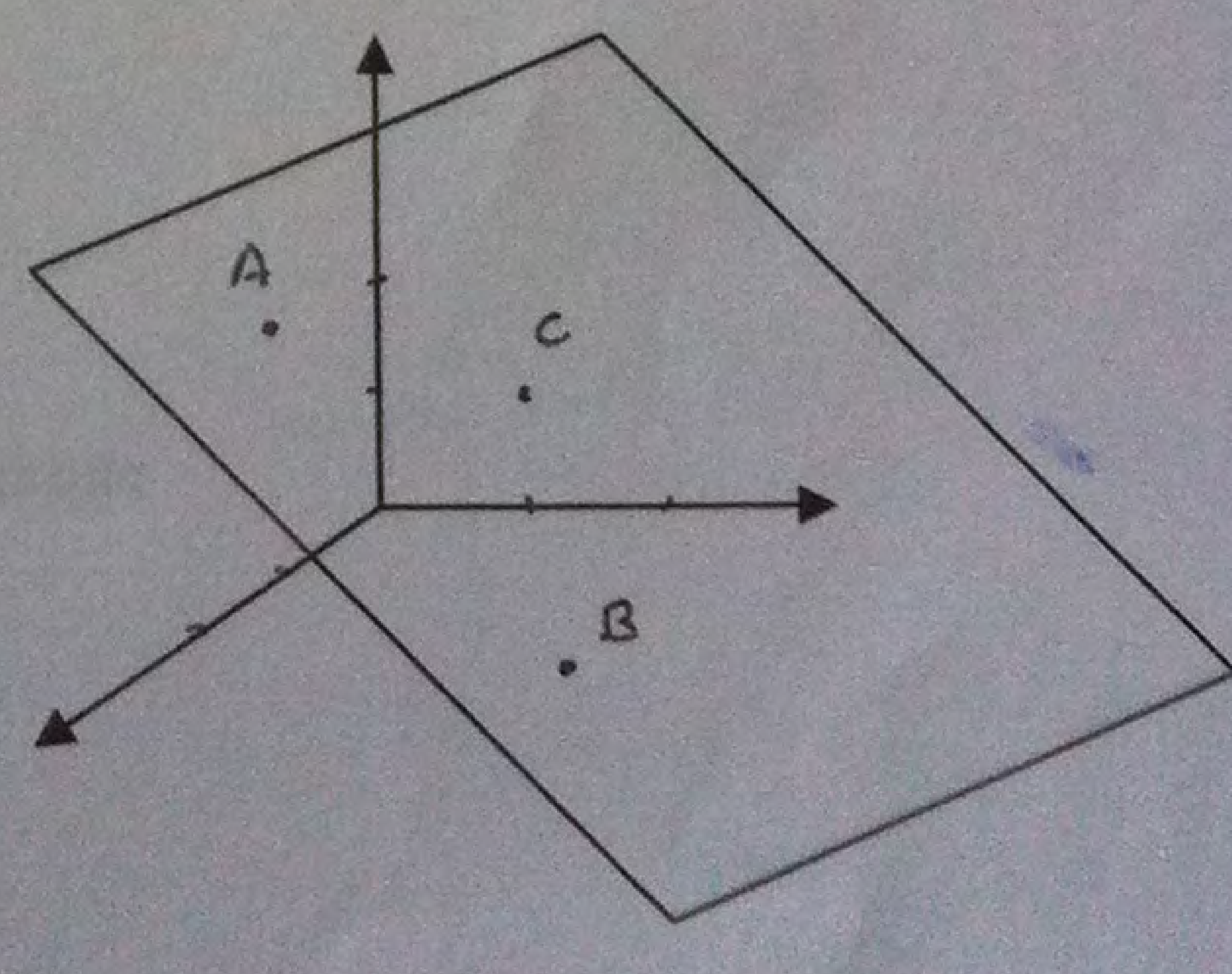
A $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AC}$

Ces relations constituent un système d'équations paramétriques du plan π .

Exemple Soient A = (1 ; 0 ; 2) B = (2 ; 2 : 0) C = (0 ; 1 ; 1)

Les équations paramétriques du plan π déterminé par ces trois points sont

$$\pi\equiv\begin{cases} x=1+\alpha-\beta \\ y=2\alpha+\beta \\ z=2-2\alpha-\beta \end{cases}$$



Pour chaque valeur réelle donnée aux paramètres α et β, on obtient les coordonnées d'un point du plan. Ainsi

Si α = 0 et β = 0, on obtient le point A = (1 ; 0 ; 2)

- Si α = 1 et β = 0, on obtient le point B = (2 ; 2 ; 0)
- Si α = 0 et β = 1, on obtient le point C = (0 ; 1 ;1)
- Si α = 1 et β = 1, on obtient le point (1 ; 3 ; -1)
- Si α = 4 et β = -2, on obtient le point (7 ; 6 ; -4)

3.3 Plan passant par un point et de vecteurs directeurs donnés

Equation d'un plan π passant par le point $A = (x_A, y_A, z_A)$

et de vecteur directeur $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

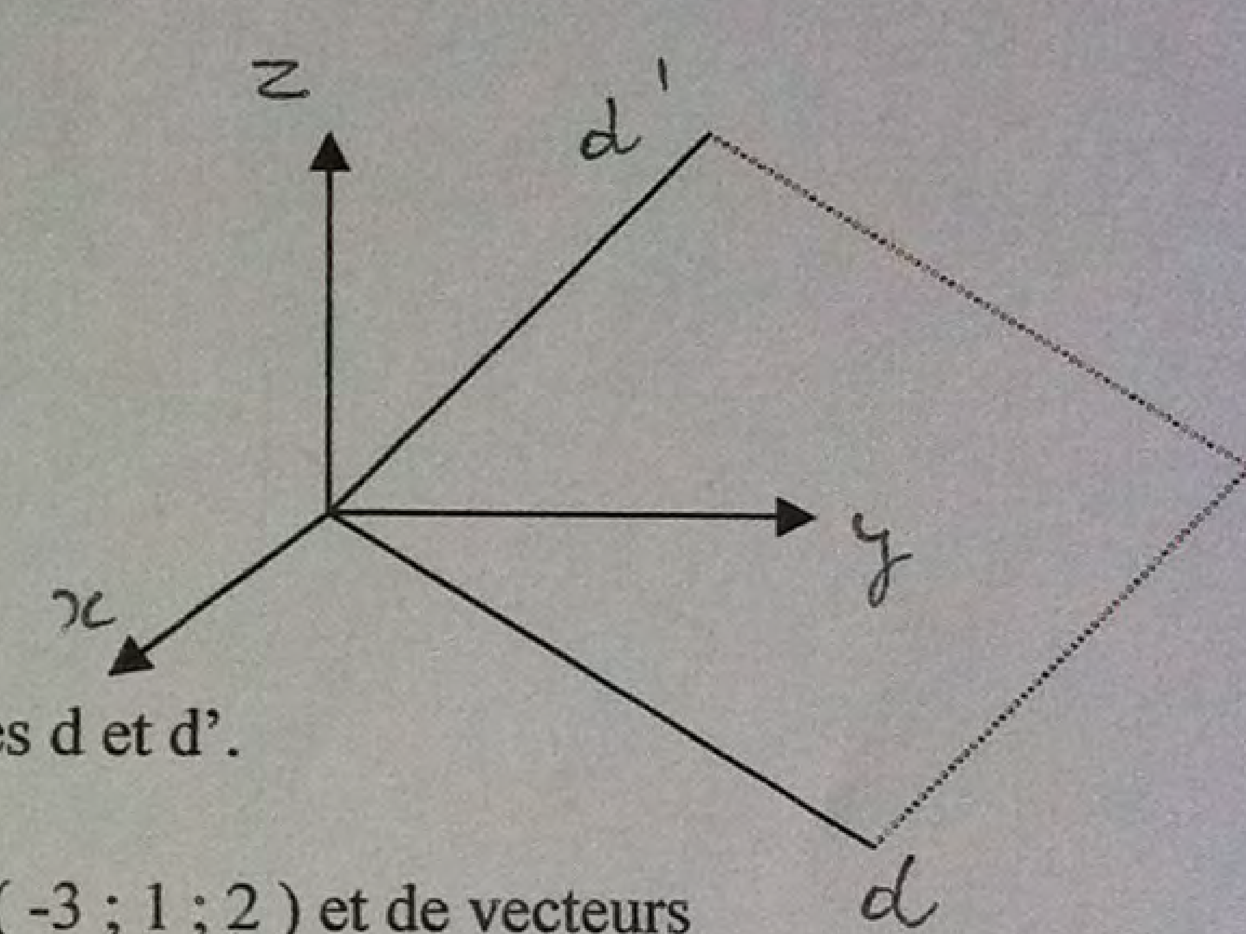
La relation vectorielle $\overrightarrow{AP} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ nous conduit au système d'équations paramétriques

$$\boxed{\pi \equiv \begin{cases} x = x_A + \alpha u_1 + \beta v_1 \\ y = y_A + \alpha u_2 + \beta v \\ z = z_A + \alpha u_3 + \beta v_3 \end{cases}}$$

Remarque :

Qu'il s'agisse d'une droite ou d'un plan, les coefficients qui multiplient les paramètres sont toujours les composantes d'un vecteur directeur.

EXERCICES



1. a) Donner les composantes d'un vecteur directeur de la droite d, bissectrice du système d'axe XY
   b) Donner les composantes d'un vecteur directeur de la droite d', bissectrice du système d'axe YZ
   c) Donner un système d'équations paramétriques des plans XY ; XZ et YZ
   d) Donner un système d'équations paramétriques du plan formé par les droites d et d'.

2. Donner un système d'équations paramétriques du plan contenant le point A = (-3 ; 1 ; 2) et de vecteurs directeurs $\vec{a} = (1,-2,3)$ et $\vec{b} = (-1,2,3)$

3.. Donner un système d'équations paramétriques du plan φ passant par P = (1; 0; -1) et parallèle à π

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 2\lambda + \mu + 1 \\ y = \lambda - 1 \\ z = -\lambda - 3\mu \end{cases}$$

4. On donne un plan d'équation

$$\pi \equiv \begin{cases} x = -2 + 3\alpha - \beta \\ y = 1 - \alpha - \beta \\ z = 2\alpha \end{cases}$$

Peut-on trouver dans ce plan un point

- D'abscisse -1 et d'ordonnée -2 ? Lequel ?
- D'ordonnée 4 et de cote 1 ? Lequel ?
- D'abscisse 5 et de cote 3 ? Lequel ?

5. Donner les équations d'un plan δ contenant le point M = (1; -2; 3) et la droite

$$d \equiv \begin{cases} x = -3 + k \\ y = 2 - k \\ z = -1 + 2k \end{cases}$$

6. Donner l'équation du plan passant par les points M = (-1 ; 0 ;2) N = (2 ; 1 ; 4) P = (5, -2 ; 3)

7. Donner les équations du plan π passant par les points $R = (-1 ; 2 ; 4)$ et $S = (5 ; 0 ; 3)$ et parallèle à la droite

$$d \equiv \begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = -k \\ z = 5 - k \end{cases}$$

8. Dessiner les plans et les droites dont voici les équations

$$\theta \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = 2 \end{cases} \qquad \varpi \equiv \begin{cases} x = 2\alpha - \beta \\ y = 1 + \beta \\ z = 2 \end{cases} \qquad d \equiv \begin{cases} x = 2k \\ y = k \\ z = 0 \end{cases} \qquad a \equiv \begin{cases} x = -h \\ y = 2h \\ z = 0 \end{cases}$$

9. Les droites suivantes sont-elles parallèles ?

$$a \equiv \begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = -k - 1 \\ z = 3k + 2 \end{cases} \qquad b \equiv \begin{cases} x = -\dfrac{6}{7}h - 1 \\ y = \dfrac{3}{7}h \\ z = \dfrac{8}{7}h + 2 \end{cases}$$

4. Equations cartésiennes

4.1 Equation cartésienne d'un plan

Définition : Une équation cartésienne d'un plan de l'espace est une équation qui lie entre elles les coordonnées d'un point quelconque de ce plan, à l'exclusion de tout paramètre.

On obtient l'équation cartésienne d'un plan en éliminant les paramètres α et β dans les équations paramétriques, de manière à ne plus voir apparaître dans l'équation que les coordonnées (x, y, z) du point quelconque du plan dont on recherche l'équation.

Exemple 1: Equation cartésienne du plan π passant par l'origine $O = (0 ; 0 ; 0)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} = (3 ; 1 ; 2)$ et $\vec{v} = (2 ; -1 ; 3)$

soit $\pi \equiv \begin{cases} x = 3\alpha + 2\beta \\ y = \alpha - \beta \\ z = 2\alpha + 3\beta \end{cases}$ ou encore $\pi \equiv \begin{cases} y = \alpha - \beta \\ \beta = -\dfrac{1}{5}(2x - 3z) \\ \alpha = \dfrac{1}{5}(3x - 2z) \end{cases}$

Donc $\pi \equiv y = \dfrac{1}{5}(3x - 2z) + \dfrac{1}{5}(2x - 3z)$

En réduisant les termes semblables on obtient l'équation cartésienne du plan:

$\pi \equiv x - y - z = 0$

Exemple 2 : Equation cartésienne du plan π' passant par A =(1 ; 2 ; -3) et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ = (3 ; 1 ; 2) et $\vec{v}$ = (2 ; -1 ; 3)

Un travail similaire à partir de

$$\pi' \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\alpha + 2\beta \\ y = 2 + \alpha - \beta \\ z = -3 + 2\alpha + 3\beta \end{cases} \qquad \text{conduit à } \pi' \equiv x - y - z - 2 = 0$$

Conclusion :

Tout plan admet une équation cartésienne du genre $ax + by + cz + d = 0$
Lorsque le plan passe par l'origine, cette équation devient $ax + by + cz = 0$

Remarques

1. Un point appartient à un plan si et seulement si les coordonnée du point satisfont à l'équation du plan.

Si nous considérons la plan $\pi \equiv x - y - z = 0$, nous savons que :

- (0, 0, 0) appartient au plan car $0 - 0 - 0 = 0$
- (2, 1, 1) appartient au plan car $2 - 1 - 1 = 0$
- (4, 1, 0) n'appartient pas au plan car $4 - 1 - 0 \neq 0$

Ainsi donc si nous possédons l'équation cartésienne d'un plan, nous pouvons déterminer les coordonnées d'une infinité de points qui appartiennent à ce plan.

2. Plans parallèles

Dans nos exemples les plans π et π' sont parallèles car ils ont les mêmes vecteurs directeurs.
Leurs équations cartésiennes ne diffèrent que par le terme indépendant.
Ce résultat sera établi plus loin.

3. Les équations paramétriques au départ de l'équation cartésienne.

Nous pouvons déterminer un système d'équations paramétriques d'un plan dont on donne une équation cartésienne de la manière suivante :
Soit un plan $\pi \equiv 5x - 3y + 2z - 7 = 0$.

La coordonnée d'un point quelconque de π peut s'écrire : $\left(\alpha, \beta, \frac{7}{2} - \frac{5}{2}\alpha + \frac{3}{2}\beta\right)$.

Des équations paramétriques de π peuvent donc s'écrire

$$\pi \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \frac{7}{2} - \frac{5}{2}\alpha + \frac{3}{2}\beta \end{cases}$$

Mais on aurait pu aussi exprimer un point quelconque du plan par $(\frac{7}{5} + \frac{3}{5}\beta - \frac{2}{5}\alpha, \beta, \alpha)$

Et dans ce cas

$$\pi \equiv \begin{cases} x = \frac{7}{5} + \frac{3}{5}\beta - \frac{2}{5}\alpha \\ y = \beta \\ z = \alpha \end{cases}$$

On constate donc que le système d'équations paramétriques n'est pas unique

4.2 Equations cartésiennes d'une droite

On obtient les équations cartésiennes des droites de l'espace précédentes, en éliminant le paramètre

Exemple : Equations cartésiennes de la droite passant par le point A = (1 ; -2 ; 0) et de vecteur directeur $\vec{u}$ = (3 ; 4 ; -1)

Soit $d \equiv \begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = -2 + 4k \\ z = -k \end{cases}$ en éliminant le paramètre k, il reste **2** équations cartésiennes en x; y ; z

On obtient $d \equiv \begin{cases} x + 3z = 1 \\ y + 4z + 2 = 0 \end{cases}$

La droite d est donc définie comme l'intersection de deux plans dont on donne les équations cartésiennes.

Remarques

1. Un point appartient à une droite si et seulement si les coordonnée du point satisfont à l'équation de la droite.

Ainsi le point de coordonnées (0, 1, 4) appartient à la droite

$$d \equiv \begin{cases} y - x = 1 \\ z - x = 4 \end{cases}$$

car en substituant 0 à x, 1 à y et 4 à z les équations cartésiennes sont vérifiées.

2. Les équations paramétriques au départ des équations cartésiennes.

Pour déterminer des équations paramétriques d'une droite dont on donne les équations cartésiennes, on détermine la coordonnée d'un point quelconque de la droite.

Soit la droite d ayant pour équations cartésiennes

$$d \equiv \begin{cases} 2x + 3y - z - 4 = 0 \\ x - y + z - 6 = 0 \end{cases}$$

Nous considérons ce système comme un système en les inconnues y et z. Nous considérons donc x comme un paramètre k.

Notre système devient donc

$$\begin{cases} x = k \\ 2x + 3y - z - 4 = 0 \\ x - y + z - 6 = 0 \end{cases}$$

et si nous résolvons les deux dernières équations en y et en z, nous obtenons le système :

$$\begin{cases} x = k \\ y = \frac{10}{2} - \frac{3}{2}k \\ z = \frac{22}{2} - \frac{5}{2}k \end{cases}.$$

C'est le système des équations paramétriques de la droite d passant par le point (0, 5, 11) et de vecteur directeur (1 ; -3/2 ; -5/2)

EXERCICES

1. Donner l'équation cartésienne de $\theta \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = -\alpha + 3\beta \\ z = 3 - \beta \end{cases}$ et

$$\delta \equiv \begin{cases} x = 2\alpha + 5\beta \\ y = 3\alpha \\ z = -\alpha + 6\beta \end{cases}$$

2. Donner l'équation cartésienne du plan passant par les points

A = (1 ; 2 ; 1) B = (-2; 4 ; 5) et C = (1 ; 0 ; 0)

3. Donner un système d'équations paramétriques du plan dont on donne une équation cartésienne

$$\pi \equiv 3x - 2y + z - 1 = 0$$

4. Trouver l'équation cartésienne de π' passant par le point (1; 0; -1) et parallèle à

$$\pi \equiv \begin{cases} x = -1 + \alpha + \beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = 2 + \alpha \end{cases}$$

$z = -1$

$\pi' = \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$

5. Dans un repère de l'espace, on donne un plan d'équation 3x + 2y - 5z + 4 = 0.
Peut-on trouver dans ce plan un point

- D'abscisse 3 et d'ordonnée 1 ? Lequel ?
- D'ordonnée 4 et de cote 1 ? Lequel ?
- D'abscisse –5 et de cote 3 ? Lequel ?

pour RS $\equiv \begin{cases} x = -2-6k \\ y = +3+2k \\ z = -2k \end{cases}$ eq cart =

6. Donner les équations cartésiennes de la droite passant par R = (4 ; 1 ; 2) et S = (-2 ; 3; 0).

7. Donner les équations cartésiennes de la droite passant par T = (2; 3; -4) et de vecteur directeur $\vec{u} = (2; 0; 3)$

8. Déterminer m pour que le point $P = (2m-3; m+1; 1-2m)$ appartienne au plan

$$\pi \equiv 2x - 3y - z - 1 = 0$$

9. On donne la droite d'équations

$$d \equiv \begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + y - 4z = -3 \end{cases}$$

- Peut-on trouver sur cette droite un point d'abscisse 1 ? Lequel ?
- Peut-on trouver sur cette droite un point d'ordonnée -2 ? Lequel ?
- Peut-on trouver sur cette droite un point de cote 3? Lequel ?

10. Donner les équations cartésienne de la droite d passant par M = (2; -1; 4) et parallèle à

$$d' \equiv \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 - k \\ z = 3k \end{cases}$$

11. Déterminer les réels a et b pour que le point $A = (-2a+1; b+2; a-4b)$ appartienne à la droite

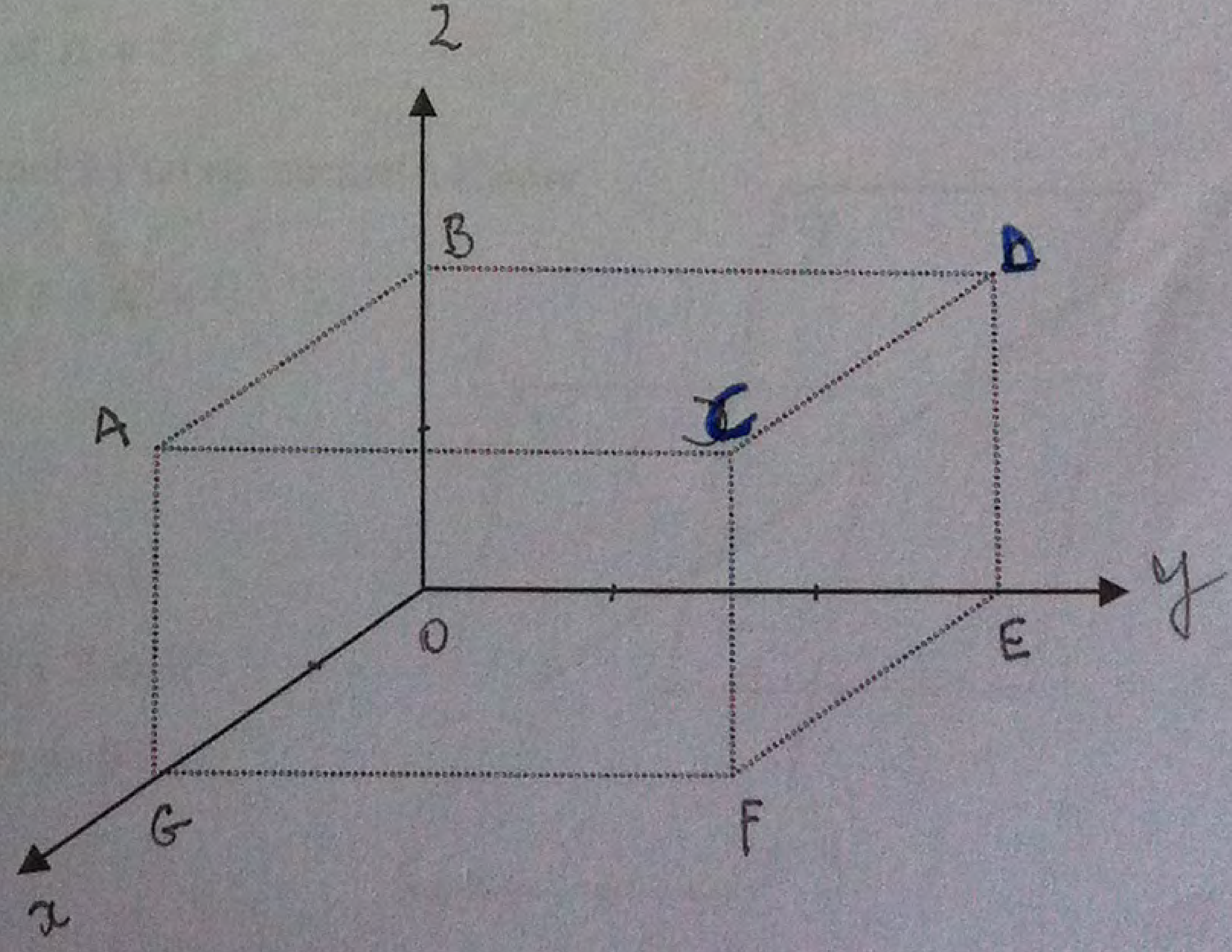
$$d \equiv \begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ 3y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

12. Donner un système d'équations paramétriques de la droite

$$d \equiv \begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

13 Donner les équations cartésiennes des droites et plans suivants :

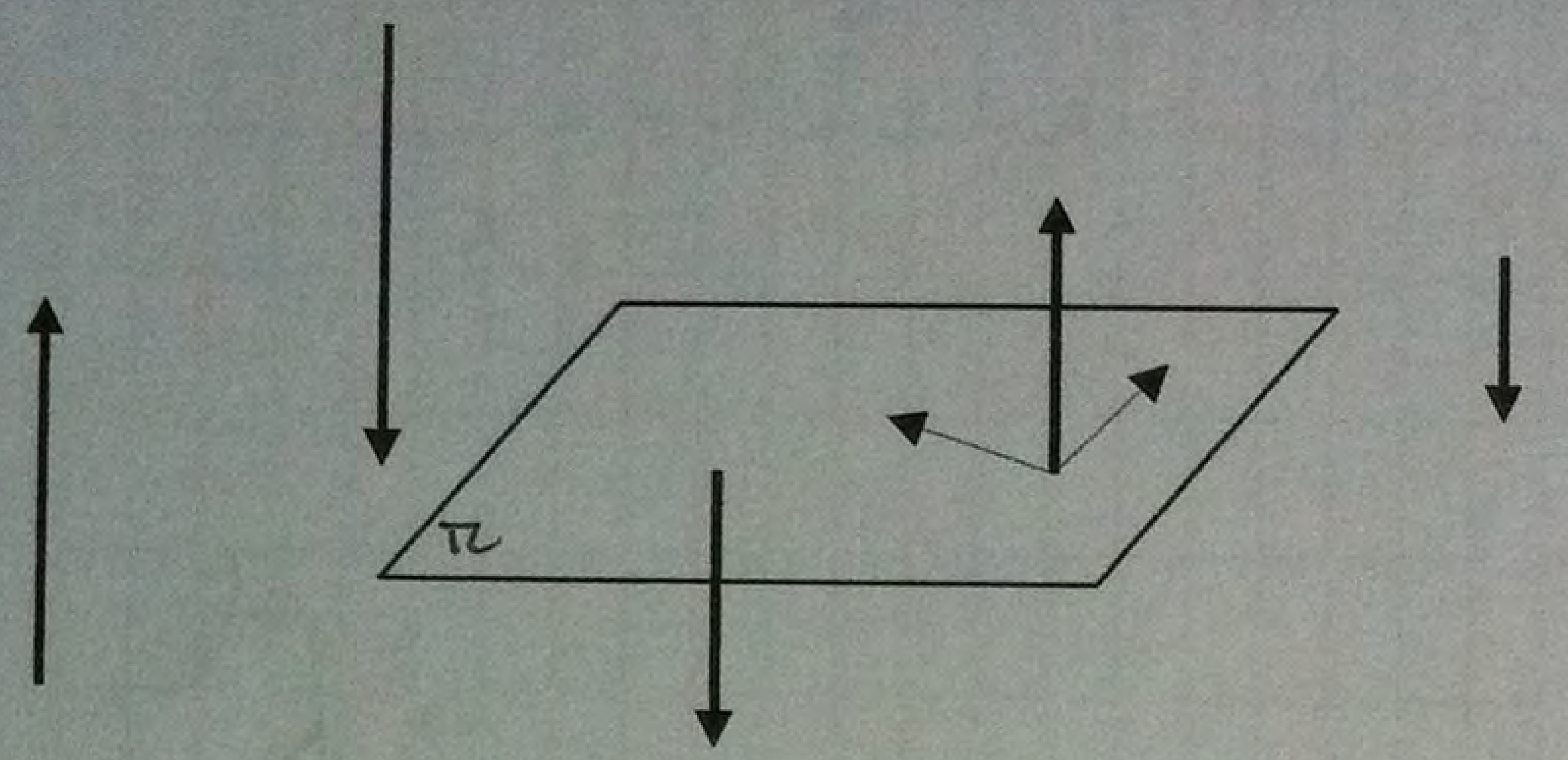
- Axe X ; axe Y ; axe Z
- Plan XY ; plan XZ ; plan XZ
- Droite AB, droite AD, droite CE
- Plan ACE, ; plan BOF ; plan AGF ; plan CEF



5. Parallélisme et perpendicularité

5.1 Vecteur normal à un plan

Un vecteur normal à un plan est un vecteur non nul, orthogonal à tout vecteur de ce plan.



Les vecteurs représentés en gras sont tous des vecteurs normaux au plan π .

Propriété

Le vecteur $\vec{n} = (a;b;c)$ **est normal au plan d'équation** $\pi \equiv ax+by+cz+d=0$

Démonstration

Il faut montrer que le vecteur $\vec{n} = (a;b;c)$ est orthogonal à tout vecteur du plan.

Cela revient à montrer que le produit scalaire du vecteur $\vec{n}$ et d'un vecteur quelconque $\overrightarrow{AP}$ du plan doit être nul.

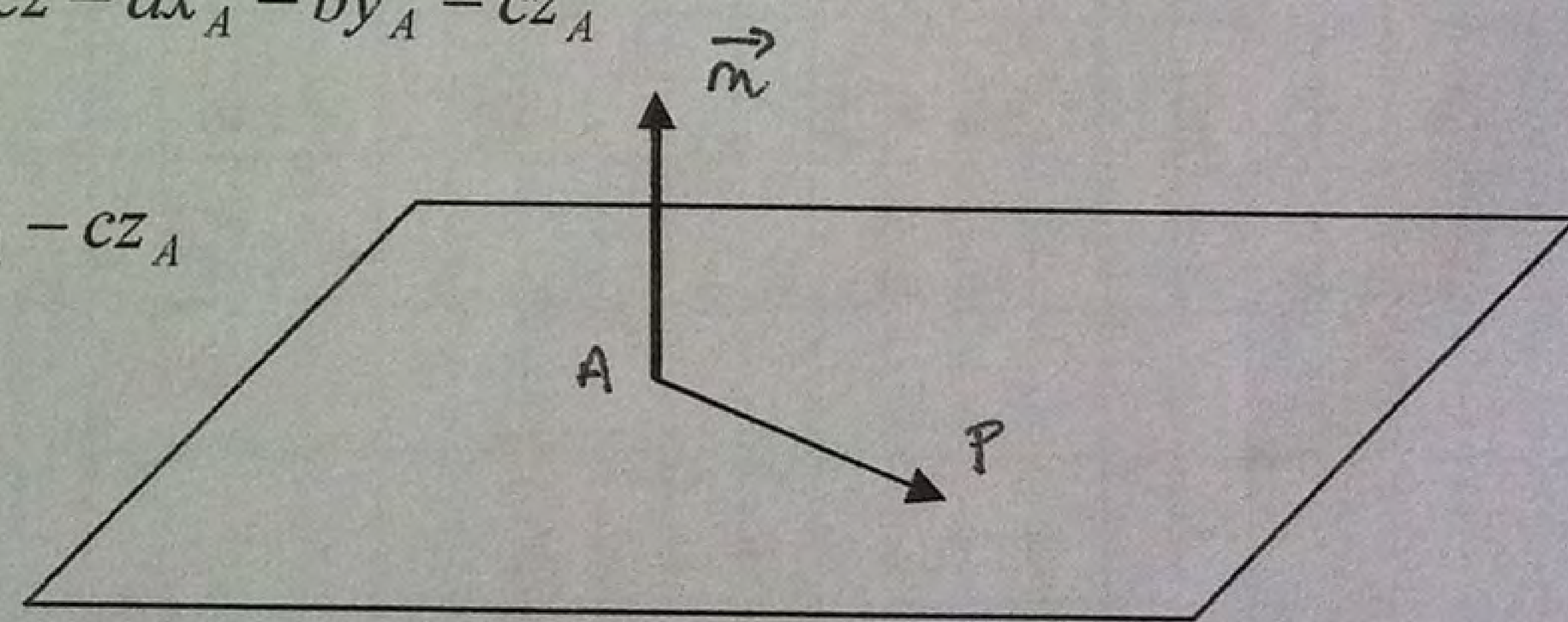
$\vec{n} = (a;b;c)$ et $\overrightarrow{AP} = (x-x_A; y-y_A; z-z_A)$

$\vec{n}.\overrightarrow{AP} = a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A) = ax+by+cz-ax_A-by_A-cz_A$

Comme $ax+by+cz=-d$, il vient

$\vec{n}.\overrightarrow{AP} = ax+by+cz-ax_A-y_A-z_A = -d-ax_A-by_A-cz_A$

Cette expression est nulle, puisque A est un point du plan π



Conséquences

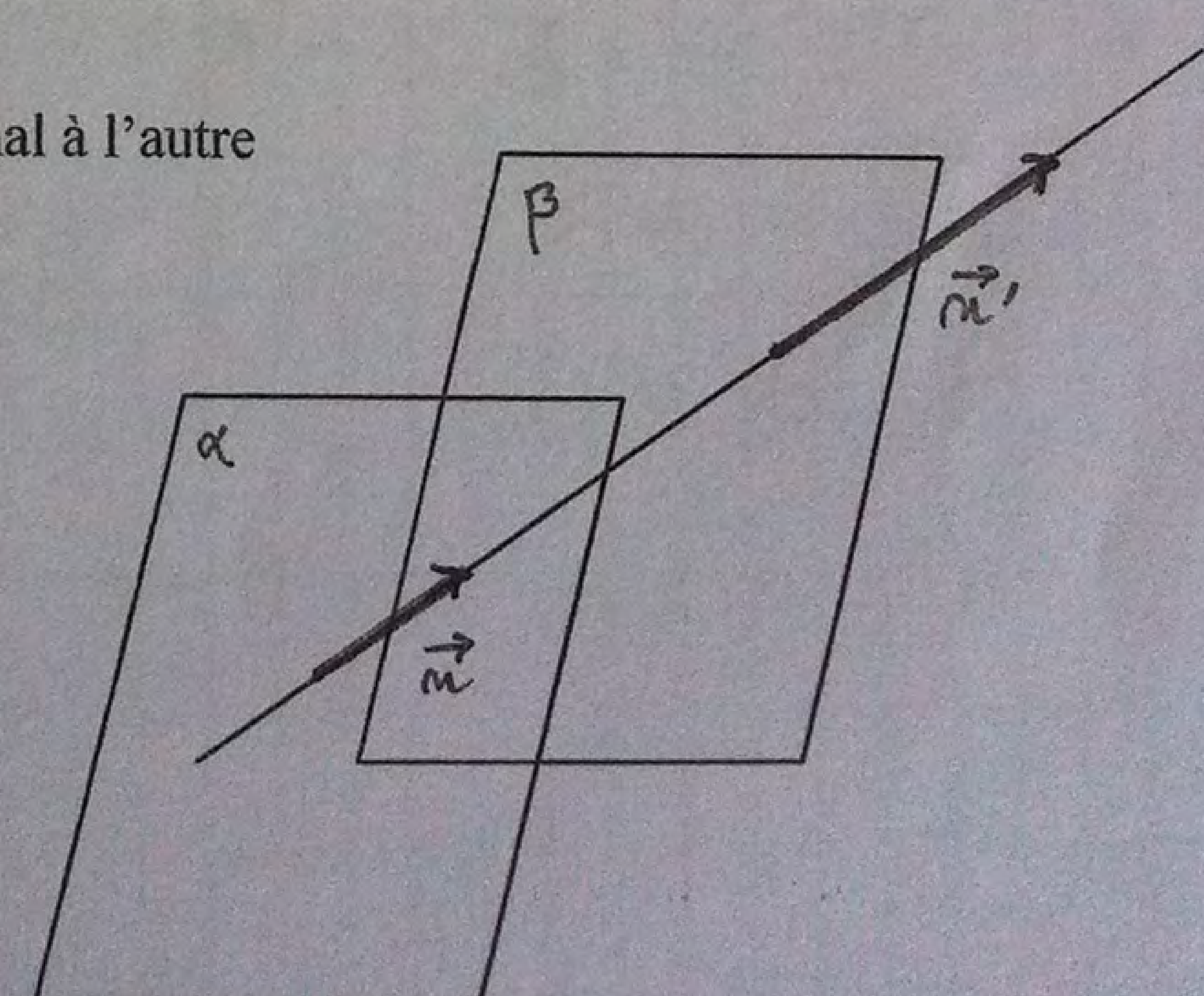
1. Tout vecteur normal au plan π **est un multiple non nul du vecteur** $\vec{n} = (a;b;c)$

2. Les plans α et β sont parallèles si et seulement si $\vec{n} = k\vec{n'}$

En effet si des plan sont parallèles tout vecteur normal à l'un est normal à l'autre

$\alpha \equiv ax+by+cz+d=0 \quad \beta \equiv a'x+b'y+c'z+d'=0$

$\alpha // \beta \quad \Leftrightarrow \quad a=ka' \quad b=kb' \quad c=kc'$



Exemples de plans parallèles :

$\alpha \equiv 2x-y+2z-4=0$

$\beta \equiv 4x-2y+4z+5=0$

$\gamma \equiv -6x+3y-6z=0$

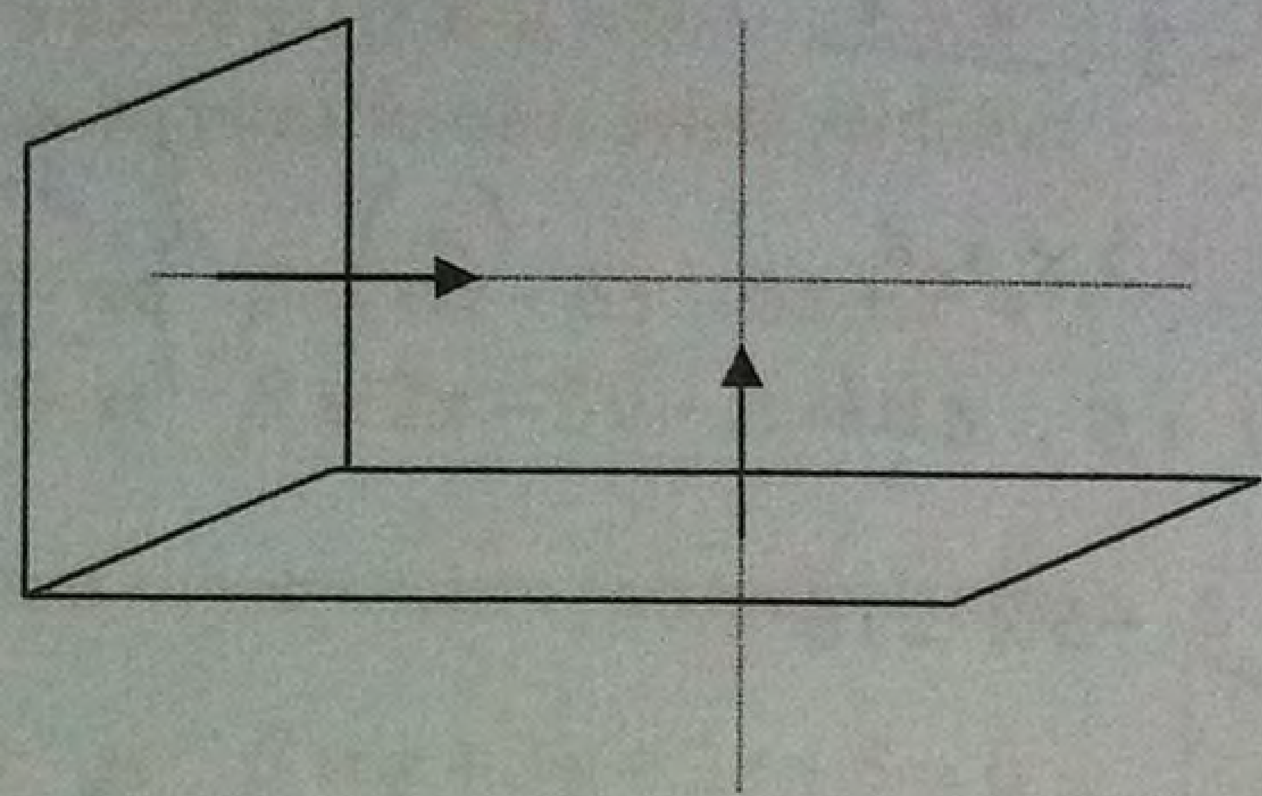
3. Soient les plans α et β

$\alpha \equiv ax + by + cz + d = 0$

$\beta \equiv a'x + b'y + c'z + d' = 0$

Les plans α et β sont perpendiculaires si et seulement si $aa' + bb' + cc' = 0$

En effet deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal à l'un est orthogonal à un vecteur normal à l'autre.



5.2 Propriétés

Nous reprenons ici une série de propretés à propos de parallélisme et de perpendicularité.
Ces propriétés relient les vecteurs directeurs et normaux. Certaines sont déjà énoncées plus avant.

- Si deux droites sont parallèles, elles admettent les mêmes vecteurs directeurs et réciproquement.
- Tout multiple non nul d'un vecteur directeur d'une droite est encore un vecteur directeur de cette droite.
- Si A et B sont deux points d'une droite, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de cette droite et de toute droite parallèle à cette droite
- Si deux plans sont parallèles, ils admettent les mêmes vecteurs directeurs et réciproquement.
- Tout multiple non nul d'un vecteur directeur d'un plan est encore un vecteur directeur de ce plan.
- Si A et B sont deux points d'un plan, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de ce plan et de tout plan parallèle à ce plan.
- Une droite d et un plan π sont parallèles si un vecteur directeur de la droite est aussi un vecteur directeur du plan.
- Deux plans sont parallèles s'ils admettent un même vecteur normal.
- Deux droites sont orthogonales si un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.
- Une droite est perpendiculaire à un plan si un vecteur directeur de la droite est un vecteur normal du plan.
- Deux plans sont perpendiculaires si un vecteur normal à l'un est orthogonal à un vecteur normal à l'autre.

EXERCICES

1 Donner l'équation cartésienne du plan passant par A = (-3, 1, 2) et de vecteur normal $\vec{n} = (-1 ; 2 ; 3)$

2. Donner l'équation cartésienne de π parallèle à $\alpha \equiv 3x - 2y + z - 1 = 0$ et passant par A = (2; -1; 3)

3. Ecrire une équation cartésienne du plan λ, passant par P = (-1; 2; 3) et orthogonal à

$$d \equiv \begin{cases} x = k \\ y = 2k - 1 \\ z = k + 2 \end{cases}$$

4. Déterminer l'équation cartésienne du plan médiateur du segment [A ; B] où A = (3; -1; 2) et B = (-1; 2; 4)

5. Etablir un système d'équations paramétriques, puis cartésiennes de la droite passant par le point M = (2 ; 1 ; -1) et perpendiculaire au plan

$$\pi \equiv 2x - 3y + 5z + 5 = 0$$

6. Former l'équation du plan qui passe par le point M = (2 ; -1 ; 1) et qui est perpendiculaire aux plans

$$\alpha \equiv 2x - z + 1 = 0 \text{ et } \beta \equiv y = 0$$

7. Donner la valeur de l et de m pour que les plans suivants soient parallèles

a) $\alpha \equiv 2x + ly + 3z - 5 = 0$ et $\beta \equiv mx - 6y - 6z + 2 = 0$

b) $\alpha \equiv mx + 3y - 2z - 1 = 0$ et $\beta \equiv 2x - 5y - lz = 0$

8. Donner la valeur de t pour que les plans suivants soient perpendiculaires

a) $\alpha \equiv 3x - 5y + tz - 3 = 0$ et $\beta \equiv x + 3y + 2z + 5 = 0$

b) $\alpha \equiv 7x - 2y - z = 0$ et $\beta \equiv tx + y - 3z - 1 = 0$

9. Donner l'équation cartésienne du plan passant par le point R = (1 ; -1 ; 1) et qui est perpendiculaire à la droite

$$d \equiv \begin{cases} -3x + 2y - 7 = 0 \\ 2x - z + 5 = 0 \end{cases}$$

10. Monter que le plan $\alpha \equiv 4x - 3y - 6z - 5 = 0$ est parallèle à la droite

$$\text{d} \equiv \begin{cases} x = 3k - 2 \\ y = -4k + 1 \\ z = 4k - 5 \end{cases}$$

6. Problèmes d'intersection

Pour déterminer l'intersection de deux droites, de deux plans, d'une droite et d'un plan, on résout le système formé par leurs équations.

6.1 Intersection de plans

6.1.1 Principes d'équivalences

Pour trouver l'intersection de trois plans dont on dispose des équations cartésiennes, il faut donc résoudre un système de trois équations à trois inconnues.

Une solution du système est un triplet de nombres réels qui vérifie toutes les équations du système.
Deux systèmes sont équivalents lorsqu'ils présentent le même ensemble de solutions
La résolution d'un système repose sur des principes d'équivalences.

1. Si on multiplie une équation d'un système par un réel non nul, les solutions du système ne changent pas.

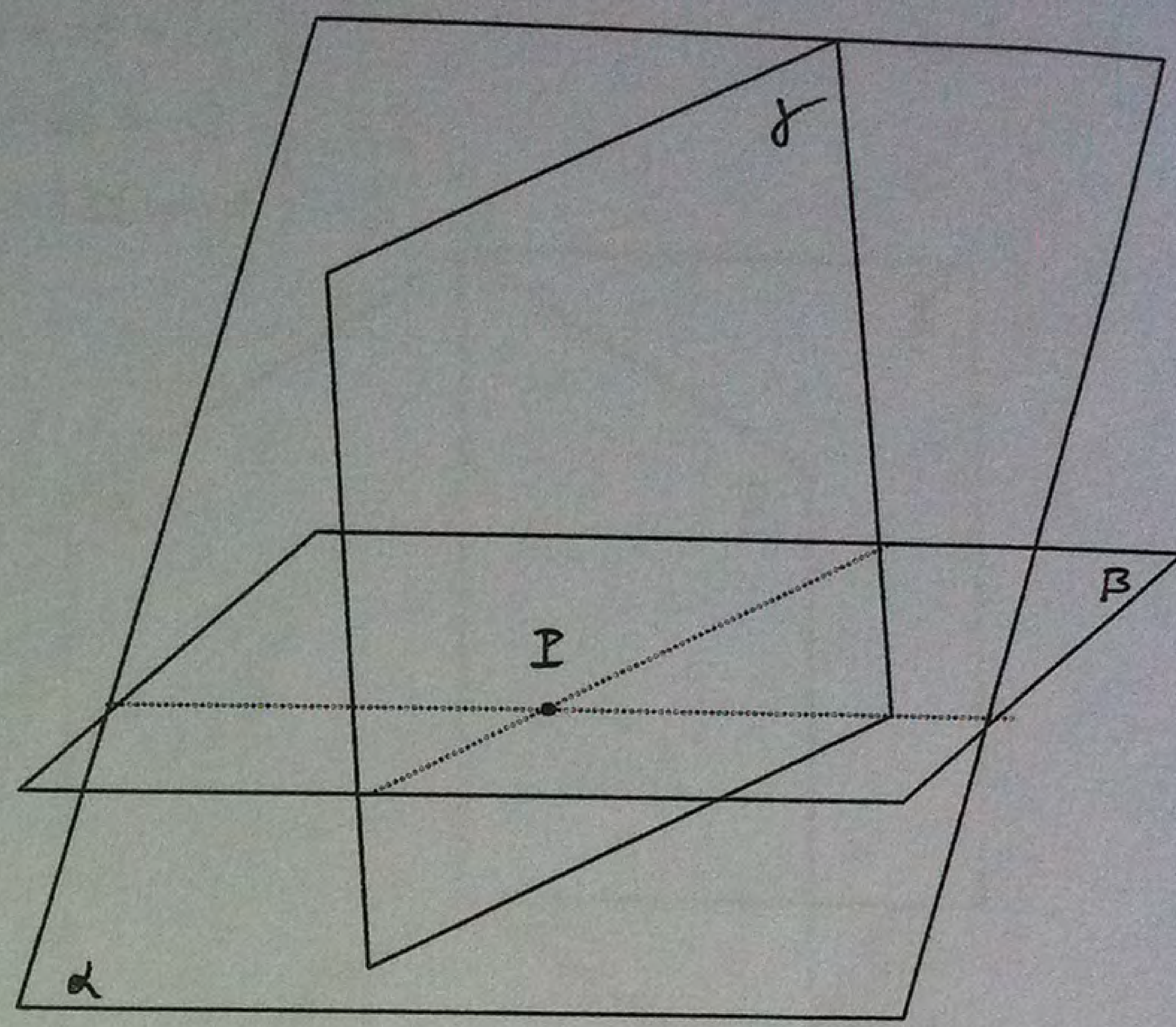
Si $A = B$ **, alors** $kA = kB \quad (k \neq 0)$

2. Si on remplace une équation par une combinaison linéaire de cette équation et d'une autre, les solutions du système ne changent pas.

Si $A = B$ **et** $C = D$**, alors** $rA + sC = rB + sD$

6.1.2 Exemples de résolutions

Méthode de substitution



$$\begin{cases}x+2y+3z=4\\3x+2y-3z=8\\2x-y-z=15\end{cases}\qquad\begin{cases}x=4-2y-3z\\3x+2y-3z=8\\2x-y-z=15\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=4-2y-3z\\3(4-2y-3z)+2y-3z=8\\2(4-2y-3z)-y-z=15\end{cases}\qquad\begin{cases}x=4-2y-3z\\y+3z=1\\5y+7z=-7\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=4-2y-3z\\y=1-3z\\5y+7z=-7\end{cases}\qquad\begin{cases}x=4-2y-3z\\y=1-3z\\5(1-3z)+7z=-7\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=4-2y-3z\\y=1-3z\\8z=12\end{cases}\qquad\begin{cases}x=\dfrac{13}{2}\\y=-\dfrac{7}{2}\\z=\dfrac{3}{2}\end{cases}\qquad S=\left\{\left(\frac{13}{2};-\frac{7}{2}:\frac{3}{2}\right)\right\}$$

Le système présente donc une solution unique.

L'intersection des trois plans est un point.

Méthode par combinaison linéaire

$$\begin{cases}2x-3y+7z=-11\\x+y-4z=7\\2x+y-6z=10\end{cases}\left|\begin{array}{c}1\\-2\\ \end{array}\right|\begin{array}{c}\\-2\\1\end{array}\qquad\begin{cases}x+y-4z=7\\\begin{cases}-5y+15z=-25\\-y+2z=-4\end{cases}\end{cases}\left|\begin{array}{c}\\1\\-5\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}x+y-4z=7\\\begin{cases}-y+2z=-4\\5z=-5\end{cases}\end{cases}\qquad\begin{cases}x=1\\y=2\\z=-1\end{cases}\qquad S=\{(1;2;-1)\}$$

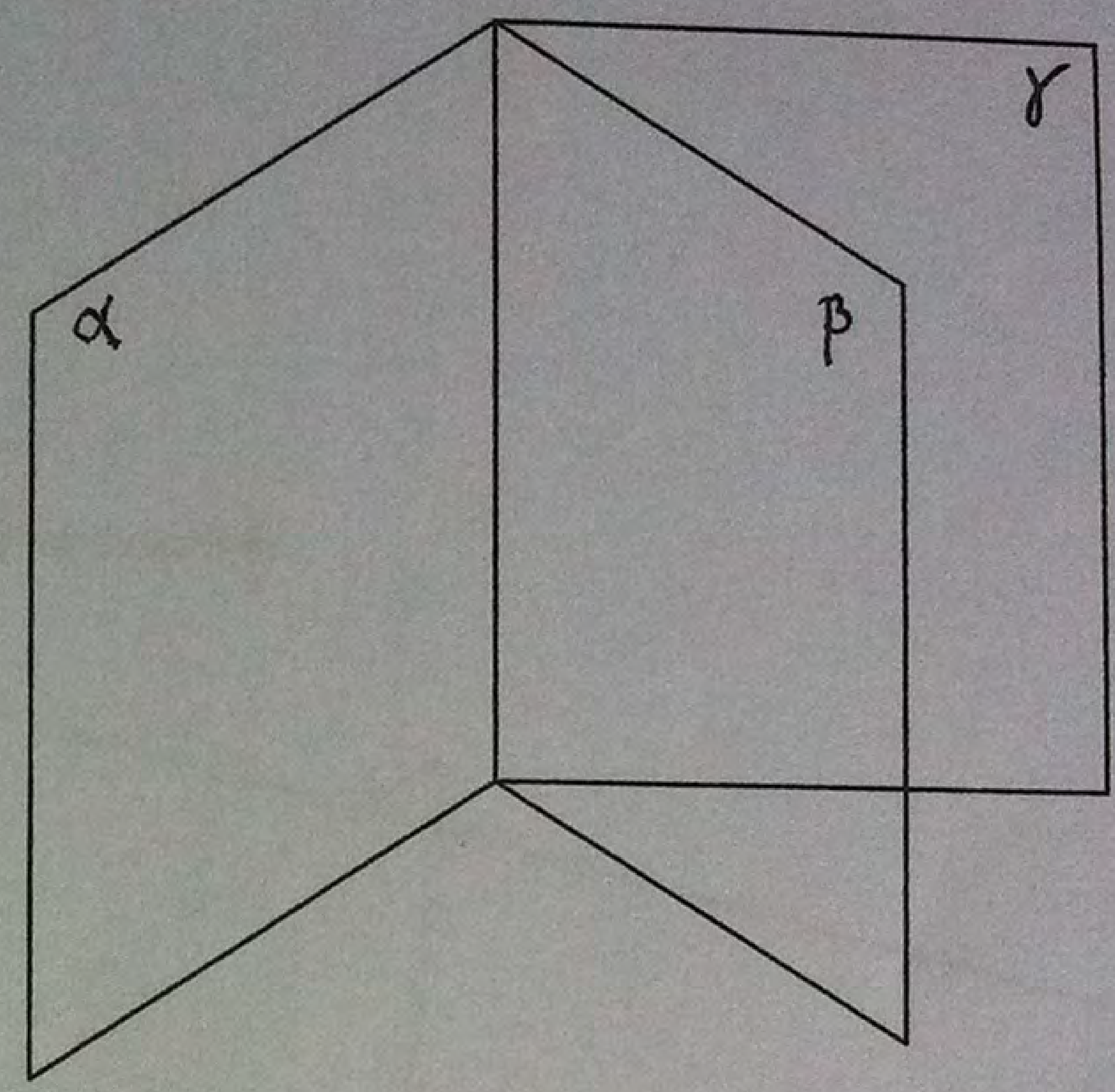
Le système admet une solution unique.

L'intersection des trois plans est un point.

2. Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+3z=1 \\ 4x+5y+6z=2 \\ 7x+8y+9z=3 \end{array}\right. \left|\begin{array}{r} -4 \\ 1 \\ \end{array}\right|\begin{array}{r} -7 \\ \\ 1 \end{array} \qquad \left\{\begin{array}{l} x+2y+3z=1 \\ \left\{\begin{array}{l} -3y-6z=-2 \\ -6y-12z=-4 \end{array}\right. \end{array}\right. \left|\begin{array}{r} \\ -2 \\ 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+3z=1 \\ \left\{\begin{array}{l} -3y-6z=-2 \\ 0y+0z=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{3\alpha-1}{3} \\ y=\dfrac{2-6\alpha}{3} \\ z=\alpha \end{array}\right.$$



$$S=\left\{\left(\frac{3\alpha-1}{3};\frac{2-6\alpha}{3};\alpha\right)\right\}$$

Le système admet une infinité de solutions dépendant du choix d'un paramètre.

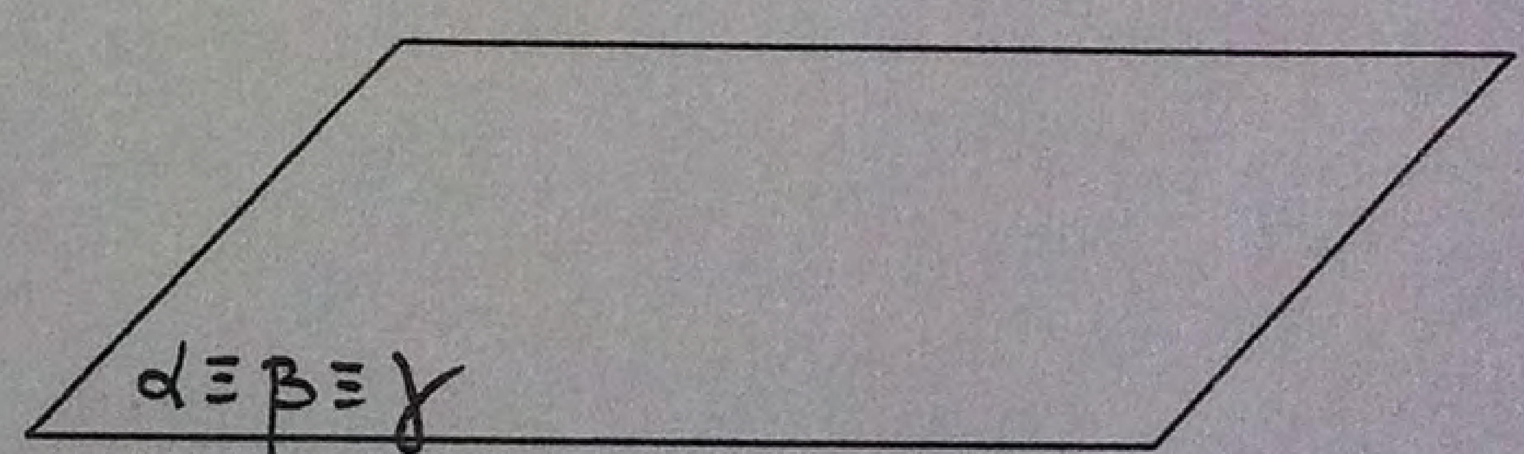
On dit que **le système est simplement indéterminé.**

L'ensemble des solutions est une droite

3. Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-3z=2 \\ 2x+2y-6z=4 \\ -3x-3y+9z=-6 \end{array}\right. \left|\begin{array}{r} -2 \\ 1 \\ \end{array}\right|\begin{array}{r} 3 \\ \\ 1 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-3z=2 \\ \left\{\begin{array}{l} 0x+0y+0z=0 \\ 0x+0y+0z=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x=2-\beta+3\alpha \\ y=\beta \\ z=\alpha \end{array}\right.$$



$$S=\{(2-\beta+3\alpha;\beta;\alpha)\}$$

Le système admet une infinité de solutions dépendant du choix de deux paramètres.

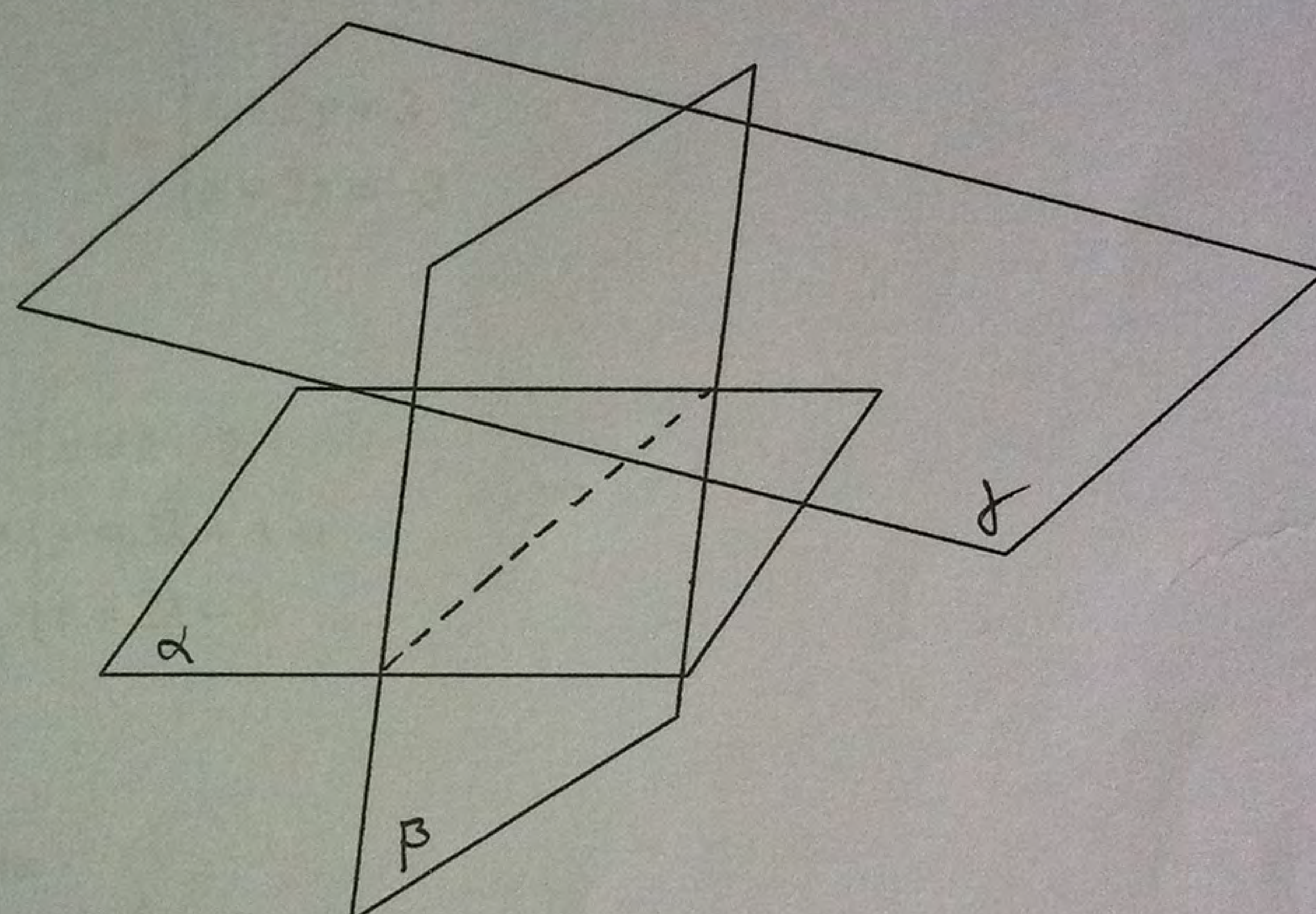
On dit que **le système est doublement indéterminé. . L'ensemble des solutions est un plan.**

4. Résoudre le système

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 4x+5y+6z=2 \\ 7x+8y+9z=1 \end{cases} \left|\begin{matrix} -4 \\ 1 \\ \end{matrix}\right|\begin{matrix} -7 \\ \\ 1 \end{matrix} \qquad \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ \begin{cases} -3y-6z=-2 \\ -6y-12z=-6 \end{cases} \end{cases} \left|\begin{matrix} \\ -2 \\ 1 \end{matrix}\right.$$

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ \begin{cases} -3y-6z=-2 \\ 0y+0z=-2 \end{cases} \end{cases} \qquad S=\{\ \}$$

Le système ne présente pas de solutions. On dit que **le système est impossible.**



EXERCICES

Résoudre les systèmes suivants
et interpréter géométriquement les solutions en terme de positions relatives de plans.

$$\begin{cases} 3x+4y-5z=2 \\ x-y+z=1 \\ 3x-2y+8z=9 \end{cases} \qquad S=\{(1\,;1\,;1\,)\}$$

$$\begin{cases} 2x-5y+3z=0 \\ 5x+2y-3z=0 \\ 21x-9y=0 \end{cases} \qquad S=\{(9\alpha\,;21\alpha\,;29\alpha\,)\}$$

$$\begin{cases} x+2y-5z=8 \\ 4x+6y-2z=5 \\ x+y+4z=2 \end{cases} \qquad S=\{\ \}$$

$$\begin{cases} x-y+z=2 \\ 4x-4y+4z=8 \\ -2x+2y-2z=-4 \end{cases} \qquad S=\{(2+\beta-\alpha\,;\beta\,;\alpha\,)\}$$

6.2 Quelques situations d'intersection

1. Quelle est l'intersection du plan α passant par les points A = (1, 0, 3) ; B = (5, 0, 6) et O = (0, 0, 0) avec le plan β passant par les points R = (0, 4, 5) ; S = (1, 9, 10) et T = (-5, -2, -1) ?

2. Quelle est l'intersection de la droite

$$a \equiv \begin{cases} x = 3 - k \\ y = k \\ z = 6 - 2k \end{cases}$$

avec la droite $b \equiv \begin{cases} x = 1 + 2h \\ y = 1 - h \\ z = 4 + 2h \end{cases}$?

3. Quelle est l'intersection de la droite

$$d \equiv \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + 2z = -3 \end{cases}$$

avec le plan $\pi \equiv 2x + y + z = 0$?

4. Quelle est l'intersection de la droite

$$d \equiv \begin{cases} x = k - 2 \\ y = 3k + 4 \\ z = 2k - 3 \end{cases} \text{ et}$$

avec le plan $\pi \equiv x + y + z = 5$?

5. Déterminer le point de percée de la droite

$$\mathrm{d} \equiv \begin{cases} x = 3 + m \\ y = 2 + 2m \\ z = 1 - m \end{cases}$$

dans le plan $\pi \equiv 3x - 2y + 5z - 1 = 0$

6. Déterminer le point de percée de la droite

$$d \equiv \begin{cases} x + 4y - z = 0 \\ 4x - 6y + 4z = 42 \end{cases}$$

dans le plan $\pi \equiv -x + 2y + z - 17 = 0$

7. Déterminer l'intersection de la droite

$$d \equiv \begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = -2 + k \\ z = 1 - k \end{cases} \quad \text{avec la droite} \quad d' \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t - 3 \\ z = 3t \end{cases}$$

7. Problèmes de distance

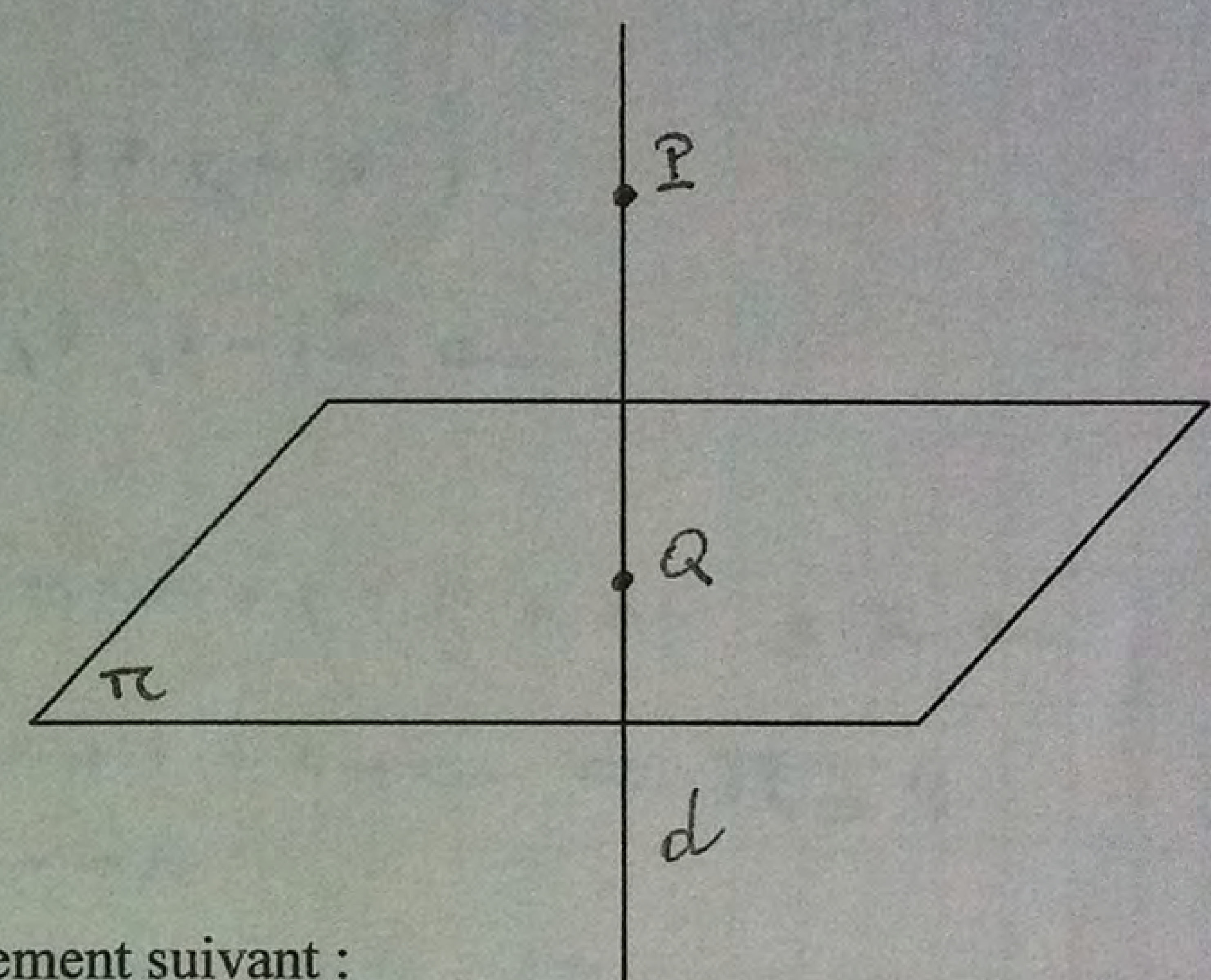
Distance entre deux points

Rappelons la formule de distance entre deux points vue dans les années précédentes.
Soit A et B deux points de l'espace.

$$d(A\,;B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Distance d'un point à un plan

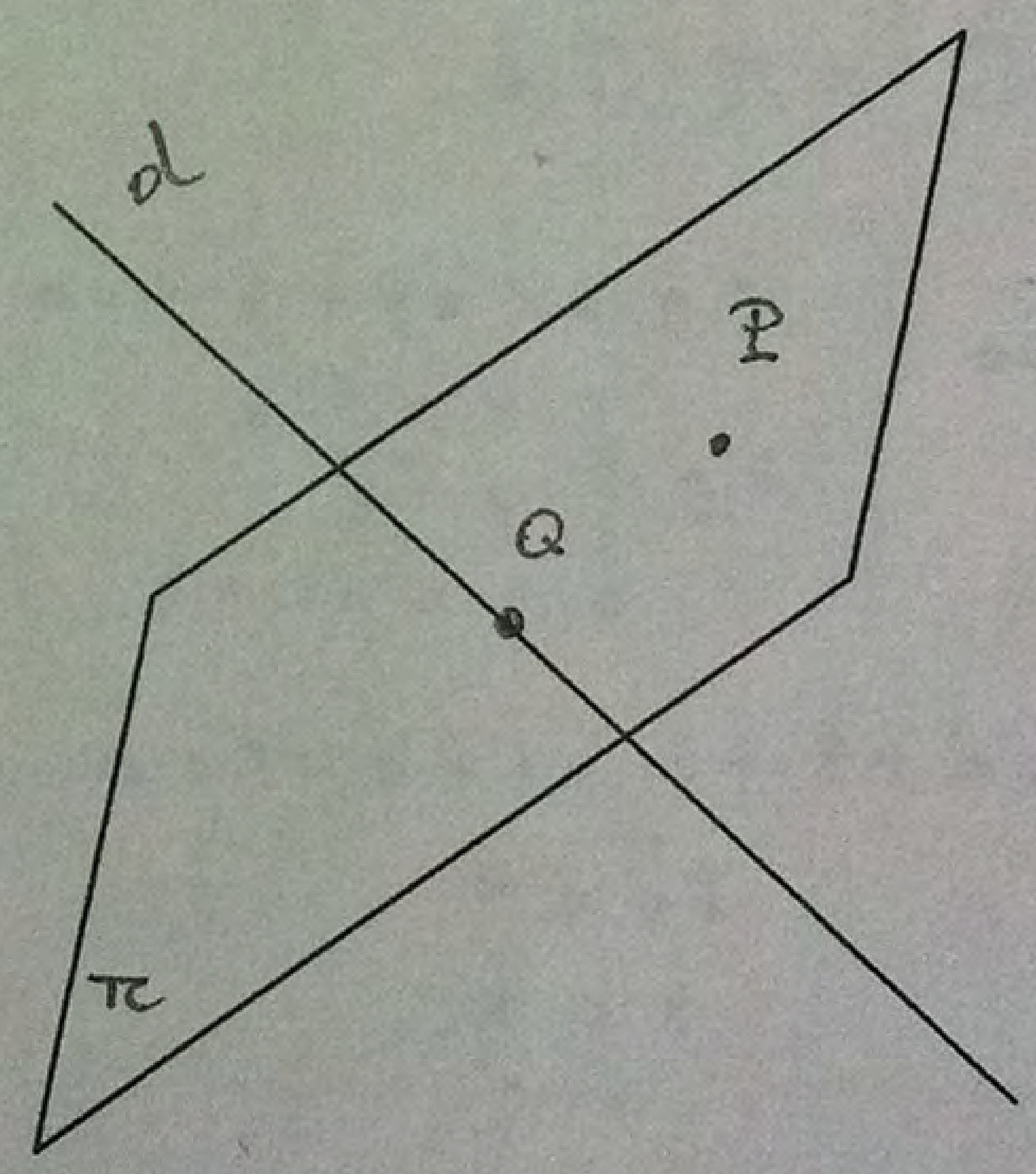
Soit P le point et π le plan



Pour calculer la distance de P à, π , il faut suivre le raisonnement suivant :
1) écrire les équations paramétriques de la droite d passant par P et perpendiculaire à π .
2) calculer les coordonnées de Q point de percée de d dans. π
3) calculer la distance séparant P de Q .

Distance d'un point à une droite

Soit d la droite et P le point



Pour calculer la distance de P à d , il faut suivre le raisonnement suivant :
1) écrire l'équation cartésienne du plan π perpendiculaire à d et passant par P.
2) rechercher les coordonnées du point de percée Q de d dans π .
3) calculer la distance de P à Q.

Sphères

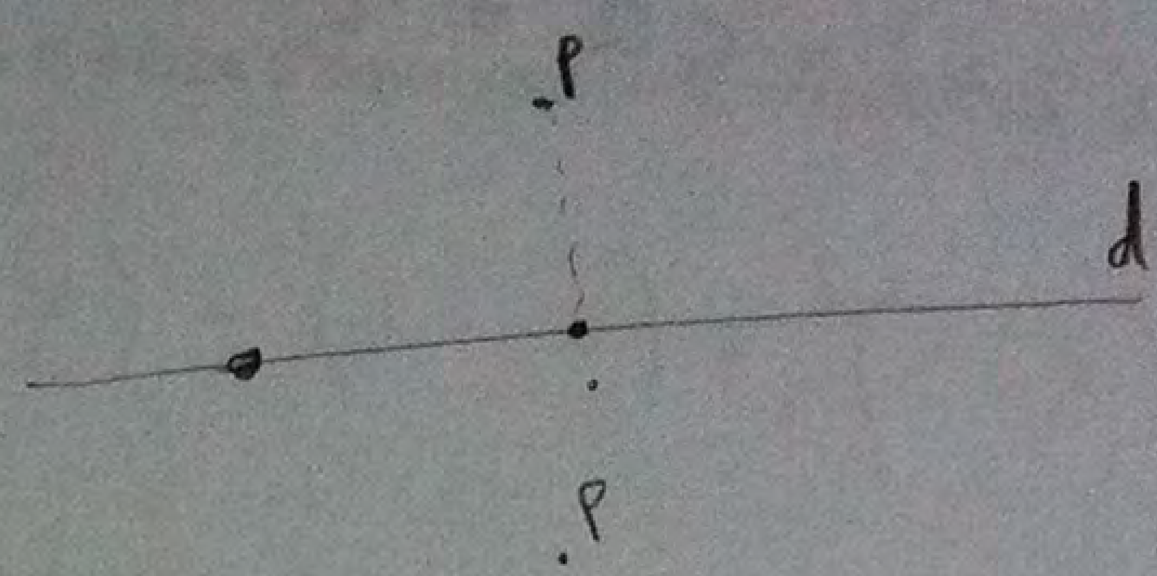
Une sphère de centre A et de rayon r est l'ensemble des points de l'espace dont la distance à A vaut r
S = { P tels que d (P ; A) = r }

$$S(A,r) \equiv (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = r^2$$

EXERCICES

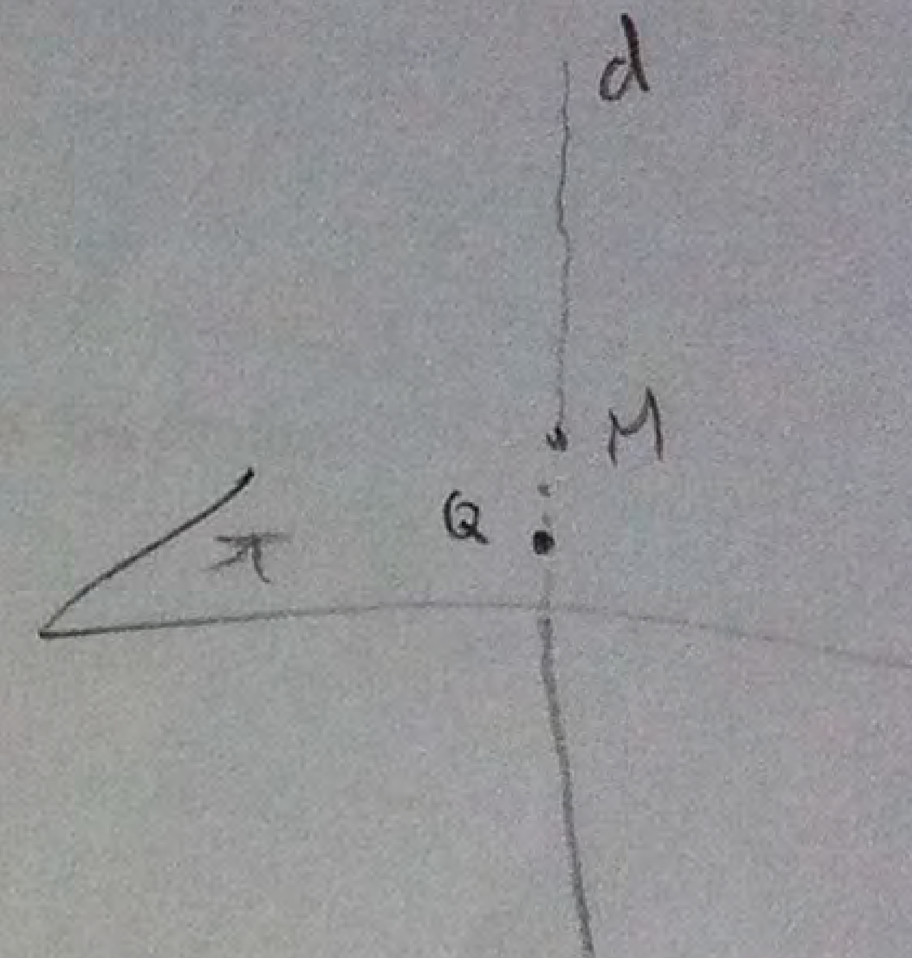
1. Calculer la distance du point $P = (0; 0; 1)$ à la droite

$$d \equiv \begin{cases} x = 2k \\ y = 3-k \\ z = 6+k \end{cases}$$



2. Calculer la distance du point $P = (0; 0; 1)$ à la droite

$$d \equiv \begin{cases} x+y = 2 \\ y-z = 1 \end{cases}$$



3. Calculer la distance du point $M = (1; 0; 1)$ au plan $\pi \equiv 3x - y - z + 1 = 0$

4. Calculer la distance du point $M = (1; 0; 1)$ au plan

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1-\alpha \\ y = 2+\alpha+\beta \\ z = 3\beta \end{cases}$$

$\sqrt{\frac{931}{361}} = d(M, \pi)$

5. Trouver la coordonnée du symétrique M de $P = (3; -2; 1)$ par rapport au plan

$$\pi \equiv 3x - 2y + 5z - 1 = 0$$

Cercle

$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$

6. Donner l'équation de la sphère passant par l'origine et de centre $C = (4 ; -4 ; -2)$

7. Donner l'équation de la sphère de centre $C = (3 ; -5 ; -2)$ et tangente au plan

$$\pi \equiv 2x - y - 3z + 11 = 0$$

8. Calculer la distance la plus courte du point $A = (-2 ; 6 ; -3)$ à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

9. Donner les équations paramétriques du diamètre de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + z - 11 = 0$$

qui est perpendiculaire au plan $\pi \equiv 5x - y + 2z - 17 = 0$

Sphère

$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2$

10. Donner les équations paramétriques du diamètre de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y + z - 13 = 0$$

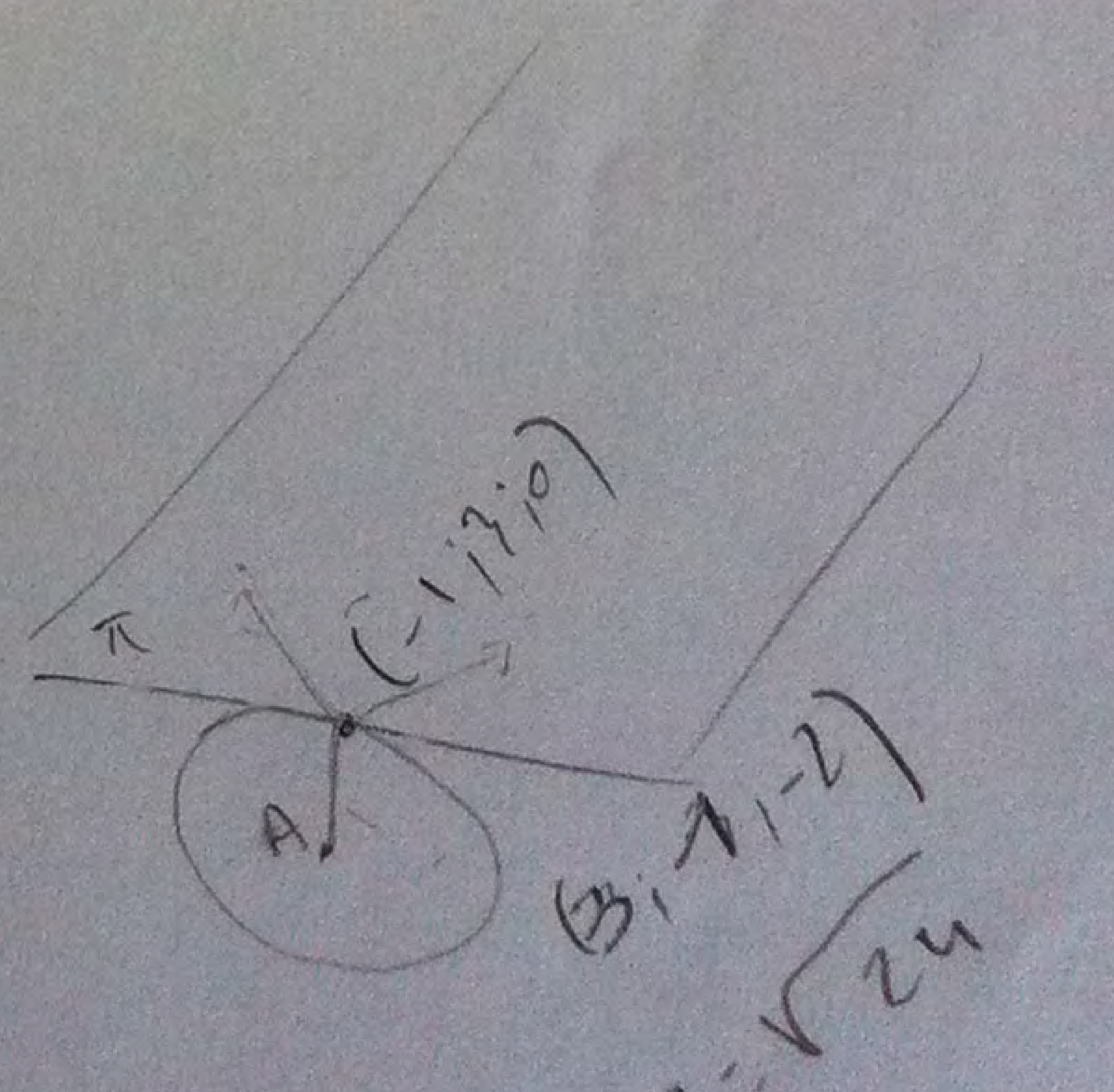
qui est parallèle à la droite

$$d \equiv \begin{cases} x = 2k-1 \\ y = 5-3k \\ z = 7+4k \end{cases}$$

11. Donner l'équation du plan tangent à la sphère

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 24$$

au point $P = (-1; 3; 0)$.



$\pi = \begin{cases} x = -1 + \ldots\alpha + \ldots\beta \\ y = 3 + \ldots\alpha + \ldots\beta \\ \ldots + \ldots\alpha + \ldots\beta \end{cases}$

Exercices de révision

1. Déterminer l'équation cartésienne du plan défini par le système d'équations paramétriques suivant

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\alpha - \beta \\ y = 5 - \alpha + 2\beta \\ z = 4\alpha - 1 + 3\beta \end{cases}$$

2. Déterminer un système d'équations paramétrique du plan d'équation cartésienne

$$\pi \equiv 3x - 2y + 6z - 3 = 0$$

3. Déterminer l'équation cartésienne du plan comprenant les points

A = (1 ; 2 ; 3) B = (2 ; 1 ; 3) C = (3 ; 1 ; 2)

4. Déterminer un système d'équations paramétriques et un système d'équations cartésiennes des droites suivantes :

   a comprenant le point P = (1 ; -2 ; 3) et de vecteur directeur (2 ; 0 ; 7)
   b comprenant les points M = (3 ; 0 ; 7) et N = (-2 ; 1 ; 7)

5. Déterminer le point de percée de la droite d dans le plan δ

$$d \equiv \begin{cases} x = 3 - k \\ y = 2 + k \\ z = 5 \end{cases} \qquad \delta \equiv x + 2y + 3z + 4 = 0$$

6. Déterminer le point de percée de la droite d dans le plan δ

$$d \equiv \begin{cases} 3x - 2y + z - 4 = 0 \\ 2x - y + 4z = 2 \end{cases} \qquad \delta \equiv x + 2y + 3z + 4 = 0$$

7. Déterminer l'équation cartésienne du plan comprenant le point P = (0 ; 0 ; 7) et la droite

$$d \equiv \begin{cases} 3x - 2y + z - 4 = 0 \\ 2x - y + 4z = 2 \end{cases}$$

8. Déterminer une équation cartésienne du plan φ comprenant le point P = (3 ; 1 ; -2) et parallèle au plan

$$\pi \equiv 4x - 2y + 5z - 3 = 0$$

9. Déterminer une équation cartésienne du plan φ comprenant le point P = (1 ; 3 ; -2) et parallèle au plan

$$\mu \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\alpha - \beta \\ y = 5 - \alpha + 2\beta \\ z = 4\alpha - 1 + 3\beta \end{cases}$$

10. Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite a comprenant le point P = (4 ; 1 ; 0) et parallèle à la droite d

$$d \equiv \begin{cases} x = 3 - k \\ y = 2 + k \\ z = 5 \end{cases}$$

11. Résoudre les systèmes suivants

$$\begin{cases} 8x + 4y - z = 2 \\ y + z = 1 \\ 4x - 5y + z = 11 \end{cases} \qquad S = \{(1;-1;2)\}$$

$$\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 2x+y-z=2 \\ x+3y-2z=-1 \end{cases} \qquad S=\left\{\left(\frac{\lambda+7}{5};\frac{3\lambda-4}{5};\lambda)\right)\right\}$$

$$\begin{cases} x-4y-z=1 \\ 2x-5y+2z=2 \\ 6x-18y+2z=6 \end{cases} \qquad S=\left\{\left(\frac{-13\lambda+3}{3};\frac{-4\lambda}{3};\lambda)\right)\right\}$$

12. Déterminer l'équation cartésienne du plan θ orthogonal à la droite d et comprenant le point P = (3 ; 2 ; -1)

$$d \equiv \begin{cases} x=3-k \\ y=2+k \\ z=5 \end{cases}$$

13. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite d orthogonale au plan θ et passant par le point P = (3 ; 3 ; 3)

$$\theta \equiv x+2y+3z+4=0$$

14. Calculer la distance séparant les points A = (2 ;-3 ;4) et B = (2 ; 2 ; 7)

15. Calculer la distance du point P = (3 ; 2 ; -1) à la droite d

$$d \equiv \begin{cases} x=3-k \\ y=2+k \\ z=5 \end{cases}$$

16. Calculer la distance du point P = (4 ; 2 ; 1) à la droite d

$$d \equiv \begin{cases} 3x-2y+z-4=0 \\ 2x-y+4z=2 \end{cases}$$

17. Calculer la distance du point P = (3 ; 3 ; 3) au plan $\theta \equiv x+2y+3z+4=0$
18. Calculer la distance du point P = (1 ; 3 ; -2) au plan

$$\mu \equiv \begin{cases} x=2+3\alpha-\beta \\ y=5-\alpha+2\beta \\ z=4\alpha-1+3\beta \end{cases}$$

19. Déterminer l'équation des sphères suivantes
    - de centre C = (1 ; 2 ; 3) et de rayon 4
    - de rayon 2 et passant par les points A= (1 ; 0 ; 0) B = (0 ; 1 ; 0) C = (0 ; 0 ; 1)
    - comprenant les ponts A= (1 ; 0 ; 0) B = (0 ; 1 ; 0) C = (0 ; 0 ; 1) D = (1 ; 1 ; 1)

20. Déterminer l'équation cartésienne du plan tangent à la sphère de centre C = (1 ; 0 ; -1) et de rayon 3 au point P = (3 ; 1 ; 1)

21. Déterminer l'intersection de la sphère de centre C = (0 ; 1 ; 2) et de rayon 5 avec la droite passant par les points O = (0 ; 0 ; 0) et A = (1 ; 1 ; 1)

22. Déterminer l'équation cartésienne du plan médiateur du segment de droite défini par les points A = (2 ; -1 ; 6) et B = (4 ; 1 ; 2)

23. Déterminer les coordonnées du point Q symétrique du point P = (4 ; 0 ; 7) par rapport au plan

$$\theta \equiv 5x+3y+6z-2=0$$