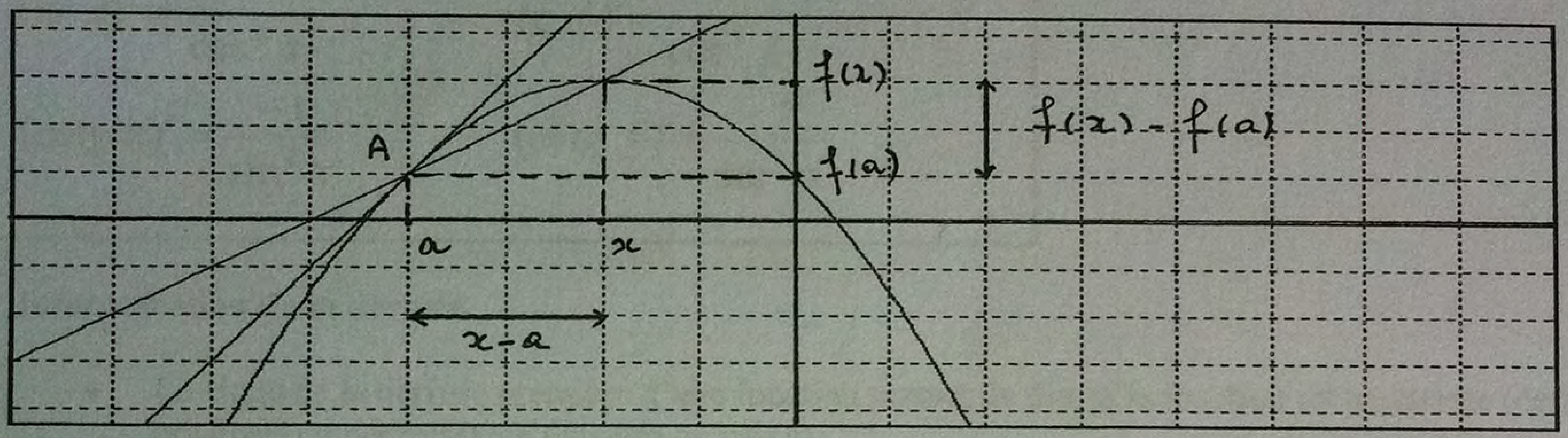
# CHAPITRE 5. FORMULES DE DERIVATION

## 1. Définitions et formules

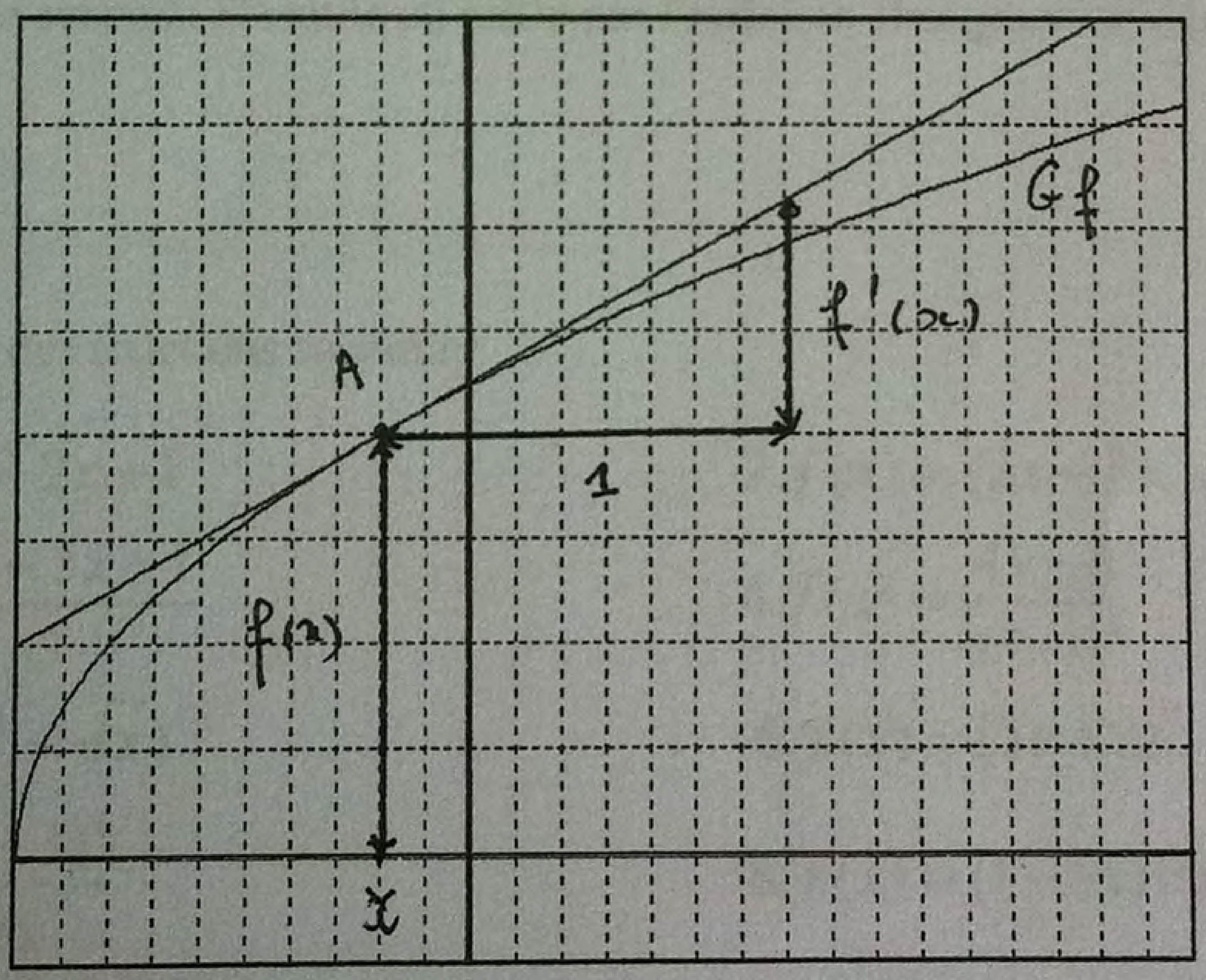
Considérons une fonction f(x) et a un point de dom f.
**Le nombre dérivé** de la fonction f au point d'abscisse a ( s'il existe ) et donné par l'expression

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Ce nombre dérivé représente encore **le coefficient angulaire de la droite tangente au graphe de la fonction f** au point d'abscisse a. Lorsque f'(a) existe on dit encore que f est **dérivable en le réel a.**




La **fonction dérivée f'** de la fonction f est une fonction qui à chaque réel x fait correspondre la valeur f'(x).




Le rapport $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ s'appelle encore **le taux d'accroissement** de la fonction.
On peut dire que la fonction dérivée enregistre les variations de la fonction f par rapport aux variations de la variable x.

**Equation de la tangente au graphe d'équation y = f (x) au point d'abscisse a**

La droite tangente passe par le point ( a ; f (a) ) et a pour coefficient angulaire f'(a), son équation est donc donnée par la formule :

$$\mathbf{y - f(a) = f'(a)\,(x - a)}$$

**Formules de dérivation**

| | |
|---|---|
| $(k)'=0$ | $(x)'=1$ |
| $(x^n)'=nx^{n-1}$ | $(f^n)'=nf^{n-1}f'$ |
| $(f+g)'=f'+g'$ | |
| $(fg)'=f'g+fg'$ | $(kf)'=kf'$ |
| $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$ | $\left(\dfrac{1}{g}\right)'=\dfrac{-g'}{g^2}$ |
| $(\sin x)'=\cos x$ | $(\sin f)'=f'\cos f$ |
| $(\cos x)'=-\sin x$ | $(\cos f)'=-f'\sin f$ |
| $(tg\ x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ | $(tg\ f)'=\dfrac{f'}{\cos^2 f}$ |
| $(cotg\ x)'=\dfrac{-1}{\sin^2 x}$ | $(cotg\ f)'=\dfrac{-f'}{\sin^2 f}$ |

**Interprétation de la dérivée**

- Le signe de la dérivée première d'une fonction permet de dire si la fonction est croissante (dérivée positive) ou décroissante (dérivée négative).
- Si la dérivée première change de signe en passant pas zéro, le graphe admet un maximum ou un minimum.
- Le signe de la dérivée seconde d'une fonction permet de dire si la fonction tourne sa concavité vers le haut (dérivée seconde positive) ou vers le bas (dérivée seconde négative).
- Lorsque la dérivée seconde s'annule ou passe par l'infini en changeant de signe, le graphe admet un point d'inflexion.

# EXERCICES

1. Déterminer les dérivées des fonctions suivantes

1. $f(x)=3x^2-2x+1$
2. $f(x)=(2x+3)(5x-x^2)$
3. $f(x)=\dfrac{4x^2-5x+1}{3}$
4. $f(x)=\dfrac{4x-5}{x^2-x^3}$
5. $f(x)=5(x^3-\sqrt{x})$
6. $f(x)=(5x+3)^4$
7. $f(x)=\dfrac{(3x-1)^2}{2x}$
8. $f(x)=(1-5x)\cos x$
9. $f(x)=\sqrt[3]{(3x^2+x+1)^2}$
10. $f(x)=\cos 3x\sin x$
11. $f(x)=\dfrac{\cos x+1}{\cos x}$
12. $f(x)=\sin^2 x+\cos x^3$

2. Donner l'équation des droites tangentes aux courbes suivantes au point d'abscisse a

$$.y=\frac{2}{3x+1} \qquad a=\frac{1}{3}$$

## 2. Dérivation des fonctions exponentielles et logarithmiques

### 2.1 Dérivée de l'exponentielle népérienne

| Si $f(x)=e^x$ | Alors $f'(x)=e^x$ |
|---|---|

En effet : $$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Il faut donc déterminer

$$\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{e^{(x-a)+a}-e^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{e^a(e^{x-a}-1)}{x-a}$$

Soit $y=x-a$

on isole

$$\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{e^a(e^{x-a}-1)}{x-a}=e^a\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}$$

Posons
$\Rightarrow y=x-a$

Par définition $e=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}$

Ceci permet de dire que si y est proche de 0, on peut écrire

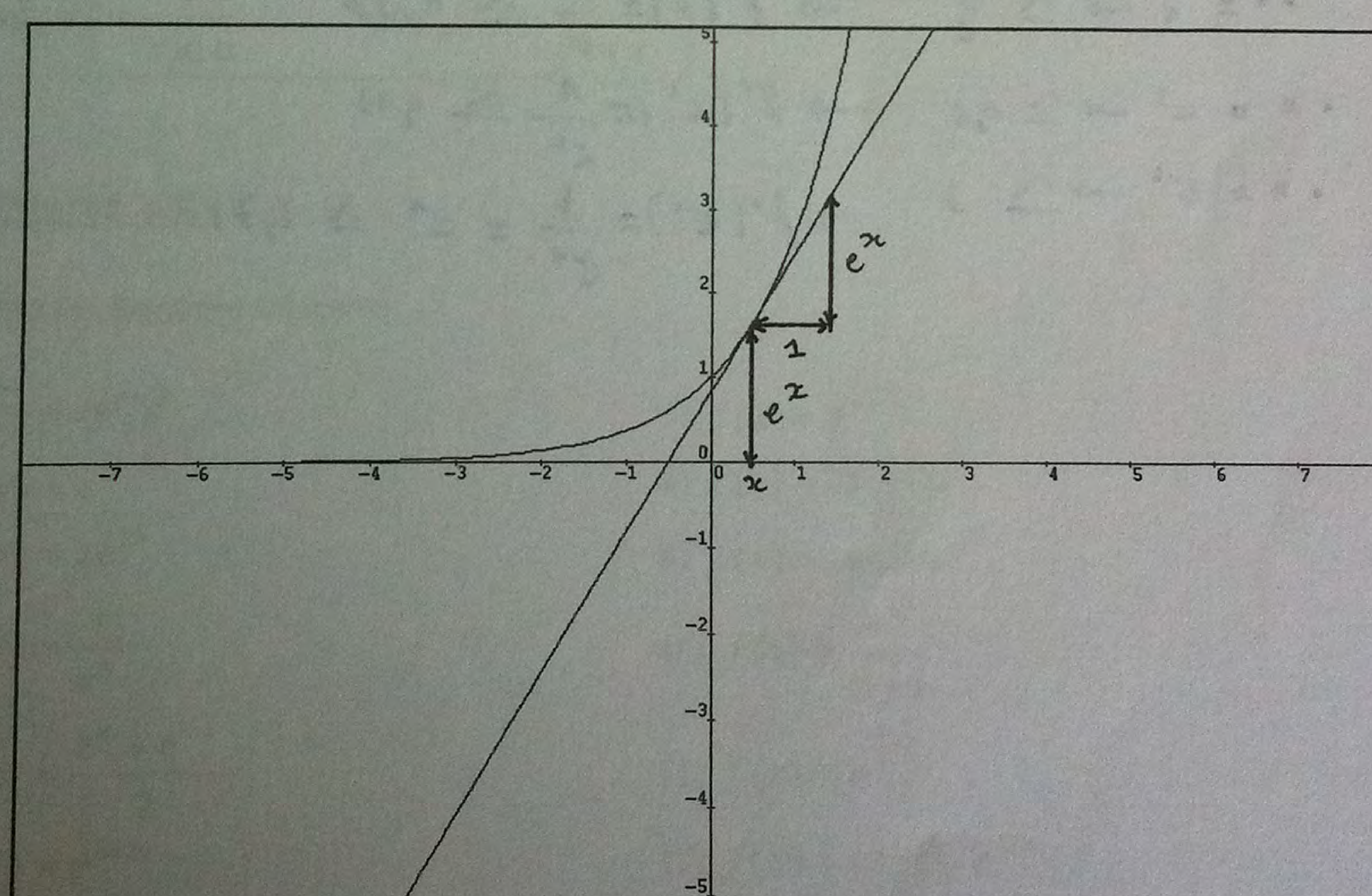
$$e\cong(1+y)^{\frac{1}{y}}\quad\Rightarrow\quad e^y\cong 1+y\quad\Rightarrow\quad e^y-1\cong y$$

On obtient donc finalement

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}=e^a\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=e^a\lim_{y\to 0}\frac{y}{y}=e^a.1=e^a=f(a)$$

Pour toute valeur de a on a donc que $f'(a)=f(a)$, il en résulte que $f'(x)=f(x)$

**La fonction $f(x)=e^x$ est donc égale à sa dérivée.**




**On peut écrire les formules**

| $(e^x)'=e^x$ | $(e^f)'=f'e^f$ |
|---|---|

ex : $(e^{x^2+5})'=(x^2+3)'.e^{x^2+5}$
$=2x.e^{x^2+5}$

## 2.2 Dérivée du logarithme népérien

$$y=\ln x \Leftrightarrow x=e^y \Leftrightarrow (x)'=(e^y)' \Leftrightarrow 1=y'e^{y} \Leftrightarrow 1=y'e^{\ln x} \Leftrightarrow 1=y'x \Leftrightarrow y'=\frac{1}{x}$$

**On peut écrire les formules**

$$\boxed{(\ln x)'=\frac{1}{x} \qquad (\ln f)'=\frac{f'}{f}}$$

ex: $(\ln(5x^2-3x))' = \frac{(5x^2-3x)'}{5x^2-3x} = \frac{10x-3}{5x^2-3x}$

## 2.3 Dérivées des fonctions de base quelconque

$$y=a^a \Leftrightarrow \ln y=\ln a^x = x\ln a \Leftrightarrow (\ln y)'=(x\ln a)' \Leftrightarrow \frac{y'}{y}=\ln a \Leftrightarrow y'=y\ln a=a^x\ln a$$

**On peut écrire les formules**

$$\boxed{(a^x)'=a^x\ln a \qquad (a^f)'=f'a^f\ln a}$$

$$y=\log_a x \Leftrightarrow y=\frac{\ln x}{\ln a} \Leftrightarrow y'=\frac{1}{\ln a}(\ln x)' \Leftrightarrow y'=\frac{1}{x\ln a}$$

**On peut écrire les formules**

$$\boxed{(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a} \qquad (\log_a f)'=\frac{f'}{f\ln a}}$$

# EXERCICES

1. Dériver les fonctions suivantes:

1) $f(x)=(e^x)^2$
2) $f(x)=e^{x^2}$
3) $f(x)=xe^{2x}$
4) $f(x)=\frac{x}{e^x}$
5) $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$
6) $f(x)=e^{\sin 2x}$
7) $f(x)=e^{\sqrt{x}}$
8) $f(x)=(x+1)e^{2x}$
9) $f(x)=\cos 2xe^{x^2}$
10) $f(x)=\frac{e^x}{x+1}$
11) $f(x)=e^{\frac{x}{3}+1}$
12) $f(x)=(x-3).e^{-3x}$

2. Dériver les fonctions suivantes:

1. $f(x)=\ln(8x^2-6x+3)$
2. $f(x)=2x(1-\ln x)$
3. $f(x)=5\ln(\sin x)$
4. $f(x)=x\ln(2x-3)$
5. $f(x)=\ln^3 x-3\ln^2 x-5\ln x$
6. $f(x)=\ln(4-x)+\ln x$
7. $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$
8. $f(x)=\ln\sqrt{x^2-3x+2}\;3^{-x^2}$
9. $f(x)=\sqrt[3]{\ln 5x}$
10. $f(x)=2^{\sin x}$
11. $f(x)=0{,}5^{\sqrt{x}}$
12. $f(x)=3^{-x^2}$
13. $f(x)=\log_3(x^2+4x)$
14. $f(x)=\log(x^4+3x^2+1)$
15. $f(x)=\log_2(3x^2+2)^5$
16. $f(x)=\log(\ln x)$
17. $f(x)=\ln(\log x)$
18. $f(x)=0{,}5^{tgx}$

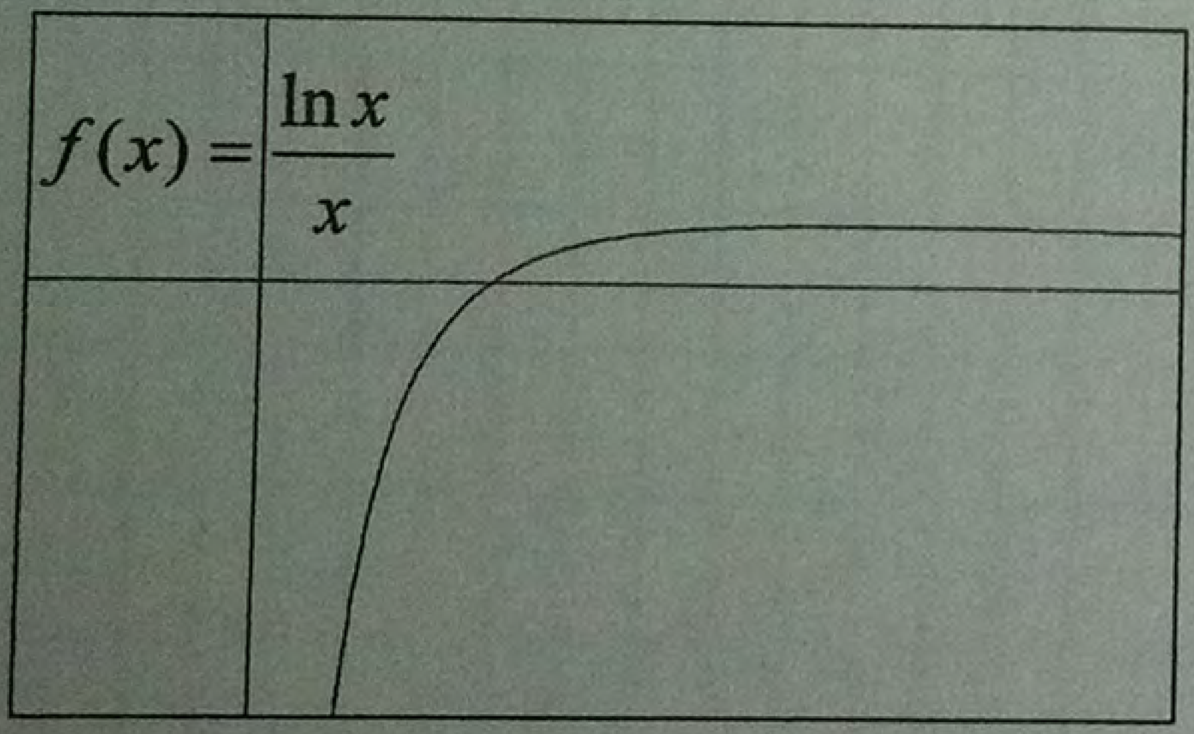
3. Donner l'équation cartésienne de la tangente à $G_f$ au point d'abscisse $a$ lorsque

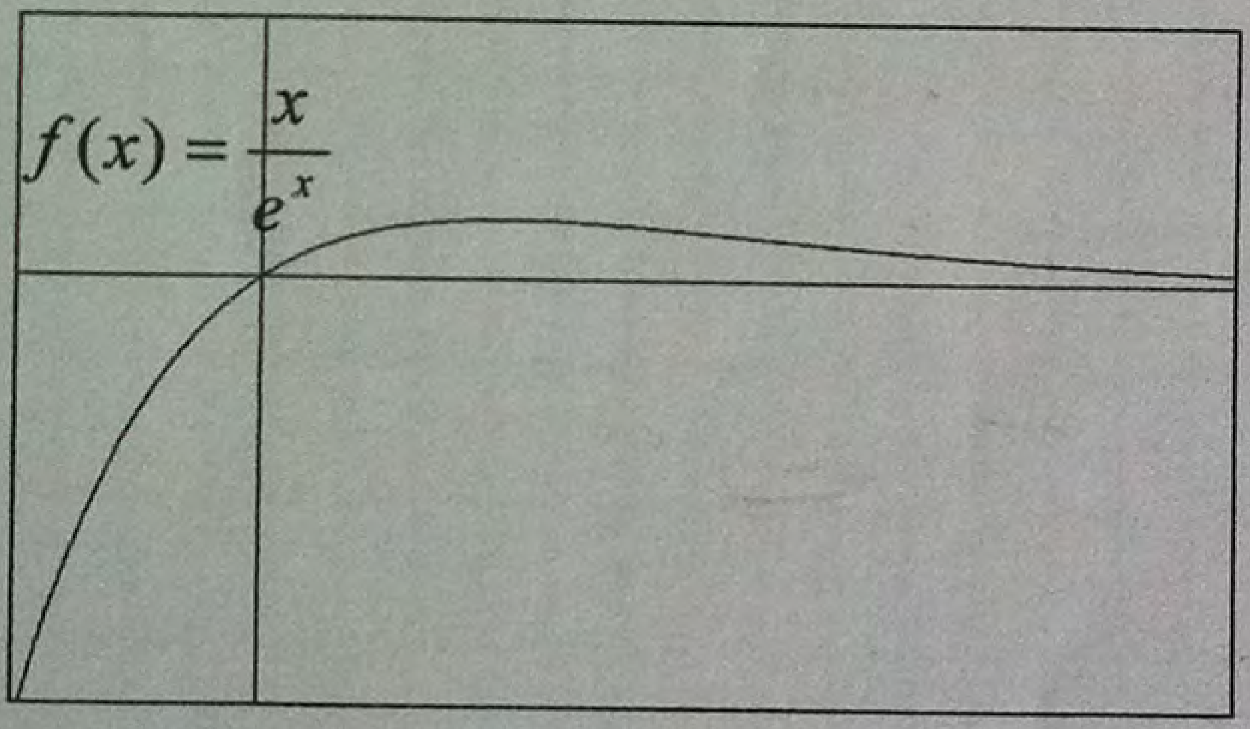
1) $G_f \equiv y=e^{3x}+1 \quad et \quad a=1$

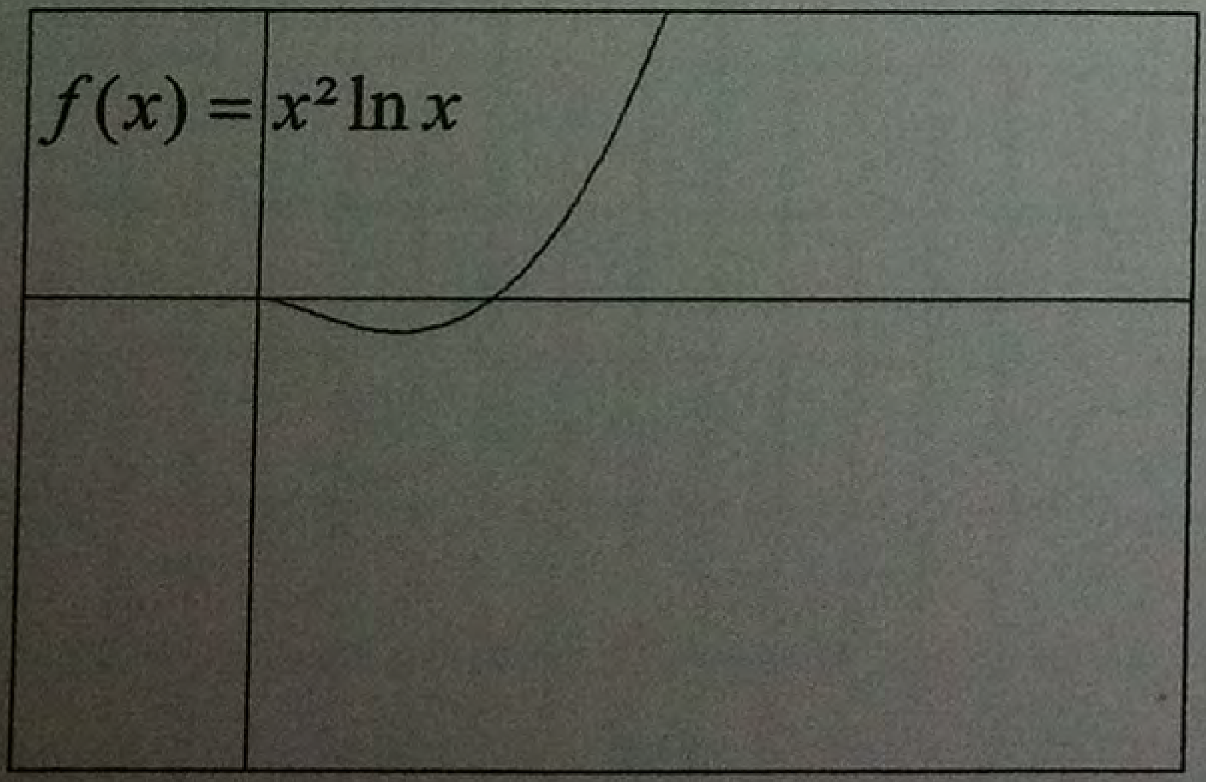
2) $G_f \equiv y=\ln 3x \qquad a=\dfrac{1}{3}$

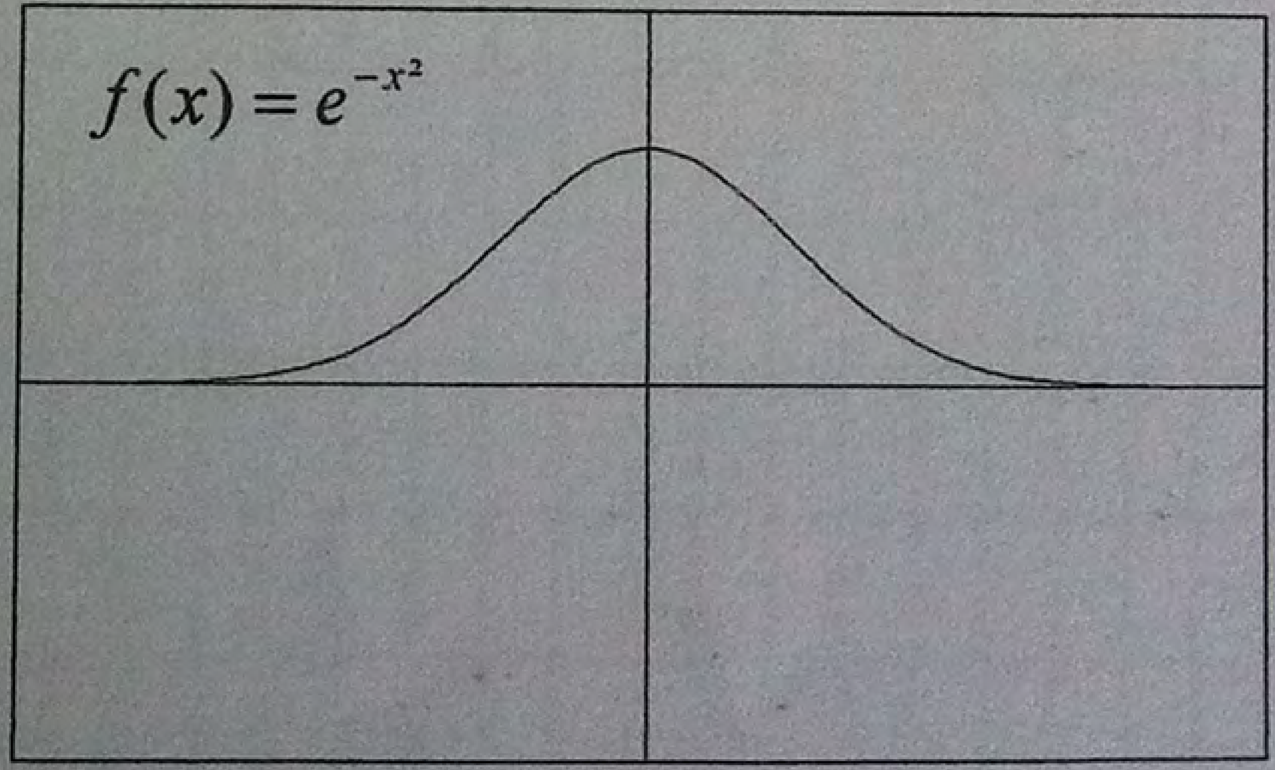
3) $G_f \equiv y=(\ln 2x)^3 \qquad a=\dfrac{1}{2}$

4. Voici l'expression analytique et le graphe de quelques fonctions. On demande dans chaque cas de déterminer les coordonnées des extremums et des points d'inflexions.



5. Lors du processus de désintégration de l'uranium en plomb, le radium se transforme en radon. Ce gaz s'introduit dans les habitations depuis le sol via les fondations et présente un danger pour la santé. A une quantité initiale Q de radium correspond, après t années, une quantité A (t) de radon donné par

$$A(t) = \frac{c_1 Q}{c_2 - c_1}(e^{-c_1 t} - e^{-c_2 t})$$

où $c_1 = \dfrac{\ln 2}{1600}$ $c_2 = \dfrac{\ln 2}{0.0105}$ sont les constantes relatives respectivement au radium et au radon.

a) Déterminer la quantité de radon présente au départ et après une longue période (lorsque t tend vers l'infini).
b) Quand la quantité de radon est elle maximale ?

6. La fonction de croissance *W de von Bertanlanffy* donne approximativement le poids *W(t)* (en kg) en fonction de l'âge $t$ (en années) des éléphants africains femelles.
Son expression est

$$W(t) = 2600(1 - 0{,}51.e^{-0{,}075t})^3.$$

a) Évaluer le poids et le taux de croissance d'un nouveau né.
b) Estimer l'âge et le taux de croissance d'un femelle adulte de 1800 kg.
c) Calculer et interpréter $\lim_{t\to+\infty} W(t)$

## Exercices de révision

1. Rechercher le domaine et préciser la dérivée des fonctions suivantes

$1. f(x) = 2^{\sqrt{x}}$ $\quad 2. f(x) = \dfrac{e^x}{e^{x-1}}$ $\quad 3. f(x) = \sqrt{1 - e^{2x}}$ $\quad 4. f(x) = \sin e^{2x}$

$5. f(x) = \log(1-2x)$ $\quad 6. f(x) = \dfrac{1}{\log_7 x}$ $\quad 7. f(x) = \log_2(4-5x) + \log_2(1-2x)$

$8. f(x) = 3^{2x+1}$ $\quad 9. f(x) = \ln^4 x + e^x$ $\quad 10. f(x) = 10^x \log x$

$11. f(x) = e^{tg\,x}$ $\quad 12. f(x) = x^2 e^{-2x}$ $\quad 13. f(x) = \ln(4x-3)^2$

2. Simplifier les expressions suivantes

$1. -3\ln(e^{-2})$ $\quad 2. \ln\sqrt{e^{2-4x}}$ $\quad 3. \log\sqrt{1000}$ $\quad 4. e^{2\ln 3 - 1}$

$5. (e^{6x})^{\frac{1}{3}}$ $\quad 6. e^{x+1}e^{-x+\ln 3.}$ $\quad 7. \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{3}{\sqrt[3]{3}}$

3. Ecrire les expressions suivantes sous forme d'un seul logarithme

$a)\ 2\log(x+3) - \log 7 - \log x$

$b)\ \frac{1}{2}\log_2 x + 1$

$c)\ 4\log_{\frac{1}{3}} x - 1$

$d)\ \ln 3x - \frac{1}{5}\ln(2-x)$

4. Ecrire les expressions suivantes avec plusieurs logarithmes

$$1.\ln\frac{(ab)^2}{c}$$

$$2.\ln\left(\frac{ab}{c}\right)^2$$

$$3.\log_3\sqrt[3]{\frac{ab}{c}}$$

$$4.\log\frac{ab^2}{\sqrt{c}}$$

$$5.\log_{\frac{1}{2}}\frac{3x}{2}$$

5. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$1.3^x - 3^{x-2} = 0$$

$$2.(0.5)^{3x-1} = 1$$

$$3.4^{1-2x} - \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{x}{2}} = 0$$

$$4.2^{x^2} \geq 2$$

$$5.(0.25)^{1-3x} > 4^{2x+3}$$

$$6.e^{4x} - 1 = 0$$

$$7.e^{2x-1} - \frac{1}{e} > 0$$

$$8.e.e^x - \sqrt{e} = 0$$

$$9.\log_4(2x+1) - \log_4(3-x) = 0$$

$$10.\log^2 x = 1$$

$$11.\log_{0.5}(x^2-9) < 1$$

$$12.\ln(4-x^2) = \ln 2x$$

$$13.\ln(2x-1) > 0$$

$$14.\log_x 10 = 2$$

$$15.\frac{1}{e^{1-2x}} > 3$$

$$16.2\log_5(x+3) - 3\log_5 2 = 0$$

$$17.\log_x(-x^2-x+2) = 1$$

# CHAPITRE 6. INTEGRALES INDEFINIES

## 1. Définitions et remarques

Jusqu'à présent, nous avons étudié le problème suivant: *étant donné une fonction f(x), calculer sa dérivée f'(x).*

Dans ce chapitre, nous allons traiter le problème inverse: *étant donné une fonction f(x), trouver la fonction F(x) telle que sa dérivée soit f(x).*

Une telle fonction F (x) s'appelle la primitive de la fonction f (x).

**Définition**

| |
|---|
| **F(x) est une primitive de f (x)**<br>**si et seulement si**<br>**F'(x) = f (x)** |

Exemples :

- Soit f (x) = cos x
  F (x) = sin x est une primitive de f (x) puisque (sin x ) ' = cos x

- Soit f (x) = 1/x
  F (x) = ln x est une primitive de f (x) puisque ( ln x )' = 1/x

**Remarques**

| |
|---|
| **Si F est une primitive de f,**<br>**Alors F + k est aussi une primitive de f, et ce pour tout réel k.** |

En effet : $(x^2)' = 2x$ donc $x^2$ est une primitive de 2x

$(x^2+7)' = 2x$ donc $x^2+7$ est aussi une primitive de 2x

| |
|---|
| **Si F est une primitive de f**<br>**Alors l'ensemble des primitives de f est l'ensemble des fonctions F + k où k est un réel quelconque** |

**Notation et vocabulaire**

Pour désigner que l'ensemble des primitives de la fonction $f(x) = 2x$ est donné par l'expression $x^2 + k$, on écrira $\int 2x\,dx = x^2 + k$

| |
|---|
| **De manière générale, si F(x) est une primitive de f (x), on écrit**<br>$\int f(x)\,dx = F(x) + k$ |

- **L'ensemble de toutes les primitives de f s'appelle *l'intégrale indéfinie de f***
  **(Indéfinie car la primitive n'est pas unique).**
- **Le symbole $\int$ s'appelle le signe d'intégration.**
- **Il convient dans un premier temps de considérer ce signe ainsi que « dx » comme une simple notation.**
- **k est la constante d'intégration.**

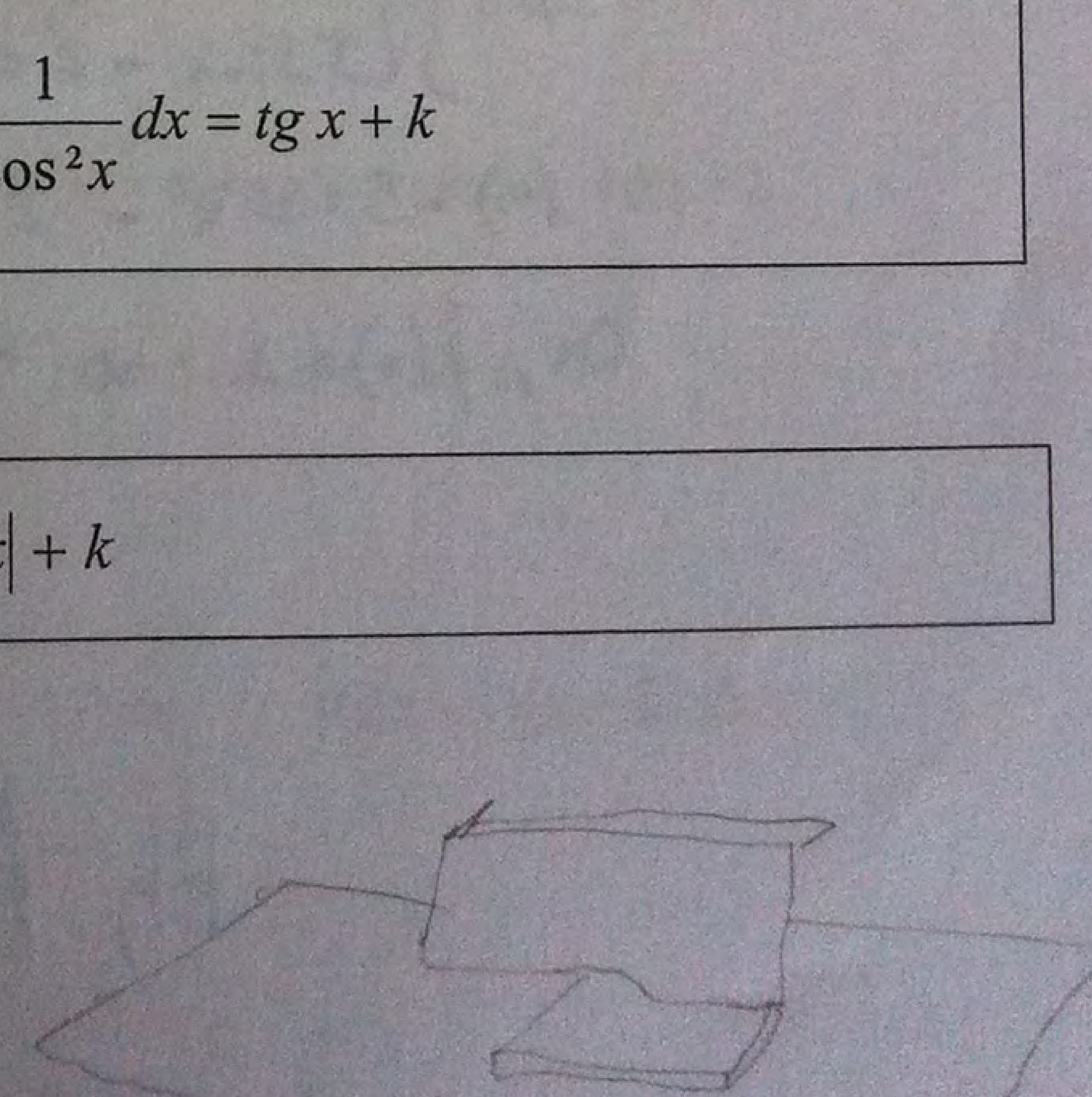
$-4 \frac{1}{\sqrt{x}} - k$ $\quad \frac{t^3}{3} = t^2$

## 2. Recherche des primitives

Toute formule de dérivée correspond à une formule de primitive.
Le tableau suivant montre cette correspondance.

| **Formules de dérivation** | **Formules de primitivation** |
|---|---|
| $(x)' = 1$ | $\int 1\,dx = \int dx = x + k$ |
| $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n$ si $n \neq -1$ | $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$ si $n \neq -1$ |
| $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ | $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + k$ |
| $(e^x)' = e^x$ | $\int e^x\,dx = e^x + k$ $\quad \int e^{3x}dx = \frac{e^{3x}}{3} + k$ |
| $\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x$ | $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + k$ |
| $(\sin x)' = \cos x$ | $\int \cos x\,dx = \sin x + k$ |
| $(-\cos x)' = \sin x$ | $\int \sin x\,dx = -\cos x + k$ $\quad \int \sin 3x\,dx = -\frac{\cos 3x}{3} + k$ |
| $(tg\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = tg\,x + k$ |

Remarque : $\int \frac{1}{x}dx = \int x^{-1}dx$ et donc $\int x^{-1}dx = \ln\lvert x\rvert + k$



## 3. Propriétés des primitives

L'intégration étant le processus inverse de la dérivation, les propriétés immédiates des primitives découlent des propriétés immédiates des dérivées.

**Primitive d'une somme**

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

La démonstration repose sur le fait que la dérivé du deuxième membre donne $f(x) + g(x)$.
En effet, par définition, nous avons,

$$\left[\int f(x)\,dx\right]' = f(x)$$

Le second membre est donc bien l'ensemble des primitives de $f(x) + g(x)$

**Produit d'une fonction par une constante**

$$\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx \qquad \text{pour tout } a \in R$$

La démonstration repose sur le fait que la dérivé du deuxième membre donne $a\ f(x)$.
Le second membre est donc bien l'ensemble des primitives de $a\,f(x)$.

## EXERCICES

1. Calculer les primitives suivantes

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $\int x\,dx =$ | 5. $\int 3\,e^x\,dx =$ | 9. $\int 3\cos x\,dx =$ | 13. $\int (4x^2 + x + 1)\,dx$ |
| 2. $\int x^4\,dx =$ | 6. $\int \sqrt{x^3}\,dx =$ | 10. $\int 3^x\,dx =$ | 14. $\int x.\sqrt{x}\,dx =$ |
| 3. $\int \frac{1}{x^2}\,dx =$ | 7. $\int \frac{-1}{2x}\,dx =$ | 11. $\int \frac{\sin x}{2}\,dx =$ | 15. $\int \frac{x^2+2}{x^2}\,dx =$ |
| 4. $\int \frac{x+1}{x}\,dx =$ | 8. $\int \frac{5}{\cos^2 x}\,dx =$ | 12. $\int (x + \frac{1}{x^2})\,dx =$ | 16. $\int (e^x + 5^x)\,dx =$ |

2. Déterminer l'expression analytique de $f(x)$ en sachant que $f'(x) = 6x^2 + x - 5$ et que $f(0) = 2$

3. Déterminer l'expression analytique de $f(x)$ en sachant que $f''(x) = 5\cos x + 2\sin x$ et que $f(0) = 3$ et $f'(0) = 4$

4. Calculer les primitives suivantes

$$\int (3\sqrt{t} + 2t)\,dt \qquad \int x(2x+3)\,dx \qquad \int (2x-1)^2\,dx \qquad \int (2x-1)(x+2)\,dx$$

## 4. Quelques applications physiques

L'espace parcouru par un mobile le long d'une droite graduée est une fonction du temps.
Si on note e (t) l'espace parcouru en fonction du temps et v (t) la vitesse en fonction du temps, et si a (t) désigne l'accélération du mobile il vient que la vitesse est donc la dérivée de l'espace parcouru et que l'accélération est la dérivée de la vitesse

Ces relations permettent encore d'écrire que

$$\boxed{\begin{aligned} v(t) &= e'(t) \\ a(t) &= v'(t) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \int v(t)\,dt &= e(t) + k \\ \int a(t)\,dt &= v(t) + k \end{aligned}}$$

## EXERCICES

1. Une pierre est lancée en l'air verticalement par rapport au sol d'un point situé à 45 m de haut, avec une vitesse initiale de 30 m/s (g = 10 m/s²).
Sans tenir compte de la résistance de l'air, calculer

a) la position de la plerre après t secondes
b) la durée de l'ascension de la pierre
c) à quel moment et avec quelle vitesse la pierre touche le sol.

2. L'accélération due à l'attraction à proximité de la lune est de 1.6 m/s².

a) Si un astronaute jette en l'air, à la verticale, une pierre en lui donnant une vitesse initiale de 18 m/s, quelle sera la distance parcourue par cette pierre vers le haut ?

b) Revenu sur terre, l'astronaute jette en l'air, à la verticale, la même pierre avec la même vitesse initiale. Quelle sera cette fois la distance ?

3. Un objet est lâché d'une hauteur de 300 m. En négligeant la résistance de l'air, trouver

a) de combien de mètres il chute en t secondes
b) sa vitesse après 3 secondes
c) à quel moment il s'écrase au sol.

4. Une voiture initialement au repos reçoit une accélération constante.
Quelle est l'accélération qui lui permettra de parcourir 150 m en 10 secondes ?

5. Un pays possède une réserve de 100 milliards de m³ de gaz naturel. Si A (t) désigne la quantité de m³ consommée après t années, alors A' (t) est le taux de consommation.
On prédit que celui-ci sera de 5 + 0.01t milliards de m³ par an.
Combien d'années suffiront à épuiser la réserve de ce pays ?

## 5. Intégration par parties

Nous avons signalé au paragraphe précédent qu'il n'y avait pas de formule unique pour intégrer un produit. Dans le cas particulier d'un produit de polynômes, on peut trouver la solution en distribuant, en réduisant les termes semblables et en intégrant la somme algébrique.
Pour les produits de fonctions non polynômes, on pourra souvent utiliser une autre technique: **l'intégration par parties.**

Tout repose sur la formule suivante

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx}$$

En effet $[f(x)g(x)]' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$
Il vient donc que

$$\int [f(x)g(x)]'\,dx = f(x)g(x) + k$$
$$\int [f(x)g(x)]'\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)\,g'(x)\,dx$$

Il en résulte la formule.

**Exemple d'utilisation :**
On veut calculer $\int x \sin x\,dx$

$f(x) = x$ $\qquad f'(x) = 1$

$g'(x) = \sin x$ $\qquad g(x) = \int \sin x\,dx = -\cos x + (k)$

L'écriture de la constante d'intégration sera faite une fois pour toutes en fin d'exercice quand l'intégrale complète aura été calculée.

La formule amène donc:

$$\int x \sin x\,dx = -x\cos x - \int 1.(-\cos x)\,dx = -x\cos x + \sin x + k$$

## EXERCICES

Calculer:

1) $\int x \cos x\,dx =$

2) $\int x \ln x\,dx =$

3) $\int x\,e^x\,dx =$

4) $\int \ln x\,dx = \int 1.\ln x\,dx =$

50.000 Ko

5) $\int \frac{1}{x^2}\ln x\,dx =$

50 Mo

2048 Mo

6) $\int x^2 e^x\,dx =$

## 6. Intégration par changement de variable

### 6.1 Notion de différentielle

Considérons une fonction f et soit $\Delta x$ un accroissement de la variable x.
Par définition, la différentielle de la fonction f est notée d f ou d f (x) et

$$df(x) = f'(x)\Delta x$$

Dans le cas particulier où f (x) = x, il vient

$$df(x) = dx = 1.\Delta x = \Delta x\,.$$

Ceci justifie l'écriture $\boxed{df(x) = f'(x)\,dx}$

La dérivée d'une fonction peut donc se mettre sous la forme

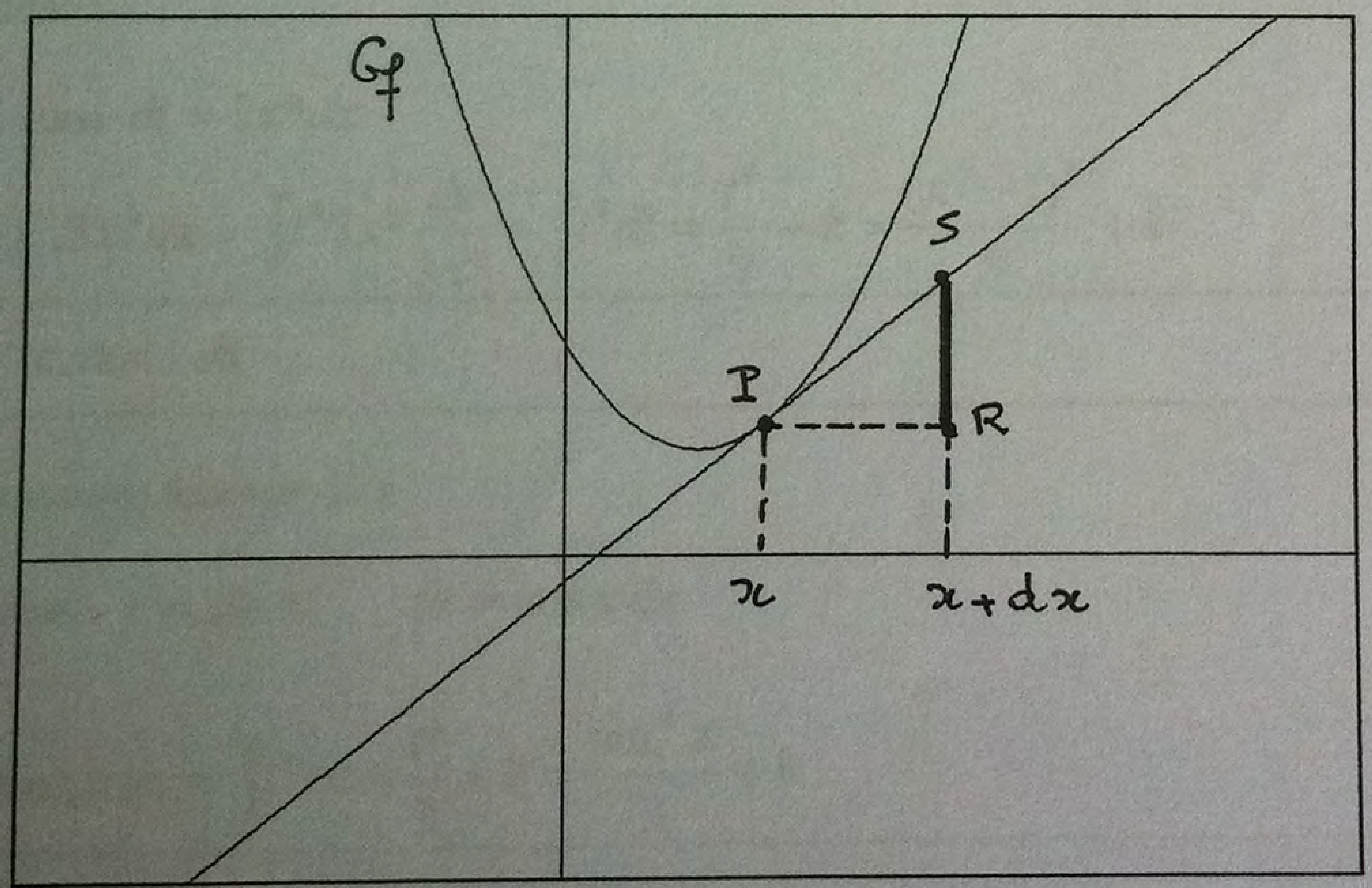
$$\boxed{f'(x) = \frac{df}{dx}}$$

Le calcul de la différentielle d'une fonction se ramène au calcul de sa dérivée

Exemples

$$f(x) = x^2 \qquad df = dx^2 = 2xdx$$
$$f(x) = \cos x \qquad df = d\cos x = -\sin x dx$$

**Interprétation graphique de la notion de différentielle**




$f'(x)$ est le coefficient angulaire de la droite tangente au graphe de la fonction au point d'abscisse x.

$$f'(x) = \frac{\overline{SR}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{SR}}{dx} \qquad \text{Il vient donc que} \qquad \overline{SR} = f'(x)dx = df$$

## 6.2 Intégration par changement de variable

La notion de différentielle va nous fournir une nouvelle technique d'intégration.
La méthode du « changement de variable » ou de « substitution » permet de résoudre des intégrales non immédiates qui échappent à l'intégration par partie.

Des intégrales d'une expression fort simple comme

$I=\int \cos 4x\, dx$ ne peuvent se résoudre par les formules d'intégration immédiate.

En effet, serait faux d'étendre la formule $\int \cos x\, dx = \sin x + k$ à cette intégrale,

et d'écrire $I = \sin 4x + k$. En dérivant ce résultat, on obtient $4\cos 4x$ et non $\cos 4x$.

**Exemples de résolution :**

1. $I = \int \cos 4x\, dx$

Introduisons la nouvelle variable $t = 4x$.
La différentielle de cette fonction est donnée par $dt = (4x)'dx = 4\,dx$

Ce qui signifie que $dx = \frac{dt}{4}$.

Si on effectue ces substitutions dans I, il vient :

$$I = \int \cos t \frac{dt}{4} = \int \frac{\cos t}{4} dt = \frac{1}{4}\int \cos t\, dt = \frac{1}{4}\sin t + k = \frac{1}{4}\sin 4x + k$$

2. $I = \int (x^3 - 1)^8 .3x^2\, dx$

Nous constatons que l'exposant porte sur $x^3 - 1$.
Or nous ne possédons qu'une formule pour intégrer une puissance de x.
Nous posons donc :

$t = x^3 - 1$ et donc $dt = 3x^2\, dx$

$$I = \int (x^3 - 1)^8 .3x^2 dx = \int t^8 3x^2 \frac{dt}{3x^2} = \int t^8 dt = \frac{t^9}{9} + k = \frac{(x^3 - 1)^9}{9} + k$$

3. $I = \int \sin^2 x.\cos x\, dx$

L'exposant porte cette fois sur sin x .

Donc nous posons $t = \sin x$ $dt = \cos x\, dx$

$$I = \int \sin^2 x.\cos x\, dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + k = \frac{\sin^3 x}{3} + k$$

4 $I = \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx$

Posons $t = x^2 - 1$ $dt = 2x\, dx$

$$I = \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + k = \ln|x^2 - 1| + k$$

**En résumé :**

La méthode repose sur la formule (peu pratique)

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(t)\, dt$$

Il convient de

1. Faire un choix de substitution $t = g(x)$
   Il n'est pas toujours facile de décider quelle est la substitution à faire.
   Plusieurs tentatives sont parfois nécessaires pour arriver au bon choix
2. Calculer $dt = g'(x)dx$
3. Introduire ces éléments dans l'intégrale de départ et simplifier l'expression. Il est indispensable que la variable x disparaisse complètement.
4. Résoudre l'intégrale à l'aide d'une formule de base. Le résultat s'exprime à l'aire de la variable t.
5. Remplacer t par sont expression en terme de x à l'aide de $t = g(x)$

## EXERCICES

Calculer les intégrales suivantes

1. $\int (x^2+5)^4\, 2x dx =$
2. $\int \sin x . \cos x\, dx =$
3. $\int 10x . \sin 5x^2 dx =$
4. $\int \sin 5x\, dx =$
5. $\int x^2 . \sqrt{x^3+2}\, dx =$
6. $\int (3x^2+1).(x^3+x-3)^4 dx =$
7. $\int \dfrac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx =$
8. $\int \dfrac{2x}{\cos^2(x^2-1)} dx =$
9. $\int e^{-x} dx =$
10. $\int \sin x . \sqrt{\cos x}\, dx =$
11. $\int (2x^3+1)^7 x^2 dx =$
12. $\int \dfrac{x^2-1}{(x^3-3x+1)^6} dx$

## 7. Exercices mélangés

1. Calculer les primitives suivantes (toutes méthodes confondues !)

1. $\int (1-x)\sqrt{x}\,dx =$
2. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,dx =$
3. $\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\,dx =$
4. $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx =$
5. $\int \sin x.\cos^3 x\,dx =$
6. $\int (2x+3)(x^2+3x-2)^3\,dx =$
7. $\int \frac{(1+x)^2}{x^3}\,dx =$
8. $\int \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx =$
9. $\int \frac{4}{x^2-4x+4}\,dx =$
10. $\int \sin^3 x\,dx =$
11. $\int \frac{tg^2 x}{\cos^2 x}\,dx =$
12. $\int \frac{6}{5-x}\,dx =$
13. $\int \cos^3 x\,dx =$
14.. $\int \frac{x}{3+x^2}\,dx =$
15. $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx =$
16. $\int \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2-6x}}\,dx =$
17. $\int \frac{2x^5}{\sqrt{1-x^6}}\,dx =$
18. $\int (1+\frac{1}{x^2})^2\frac{1}{x^2}\,dx =$
19. $\int 2\sqrt{1-3x}\,dx =$
20. $\int x\cos 2x\,dx$
21. $\int \ln(2x-1)dx$
22. $\int x e^{-2x}\,dx =$
23. $\int 4^{2x+3}\,dx =$
24. $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx =$
25. $\int \frac{6}{4-x}\,dx =$
26. $\int \frac{1}{(5x-10)^{10}}\,dx =$
27. $\int \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}\,dx =$
28. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx =$ $\quad (t=\sqrt{x})$
29. $\int \sqrt{x}\cos\sqrt{x^3}\,dx =$ $\quad (t=\sqrt{x^3})$

2. Un réservoir approvisionne en eau toute une communauté.
La consommation d'eau durant l'été, exprimée en m³ est donnée par une fonction A(t) où t est exprimé en jours et où t = 0 correspond au début de l'été.
Cette consommation fluctue selon la loi

$$A'(t) = 4000 + 2000\sin(\frac{\pi t}{90}) \qquad 0 \le t \le 90$$

a) Que représente la fonction $A'(t)$ ?

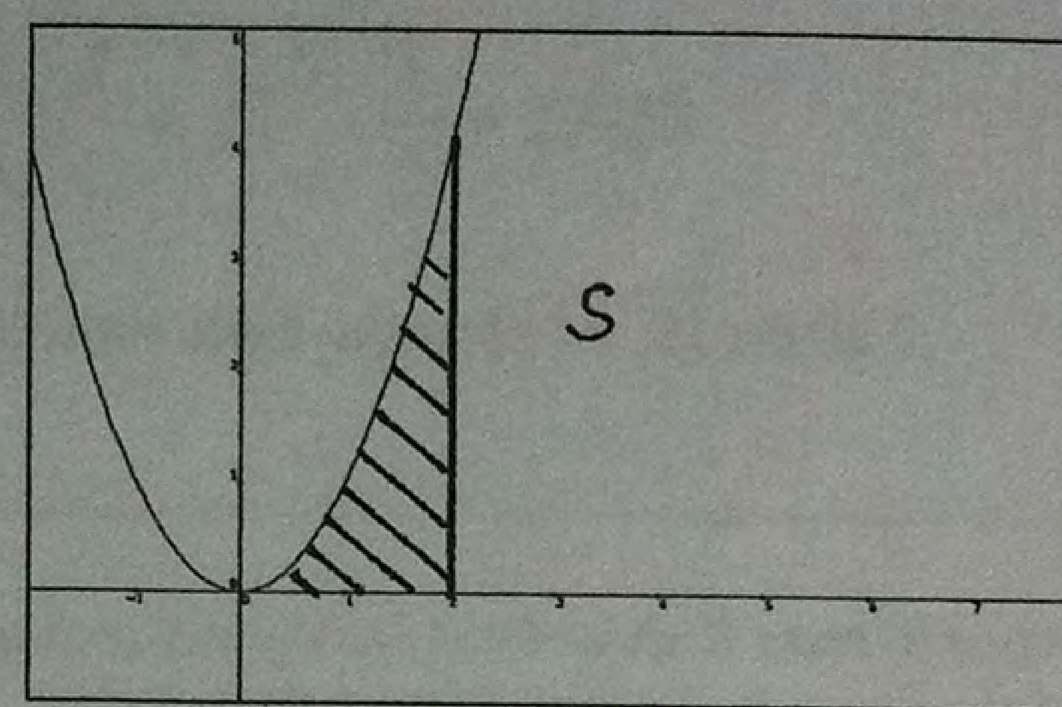
b) Quelle est l'allure graphique de cette fonction ? Quelle est sa période ?
Comment interpréter concrètement ces résultats ?

c) A combien s'est élevée la consommation d'eau pendant une période de 90 jours ?

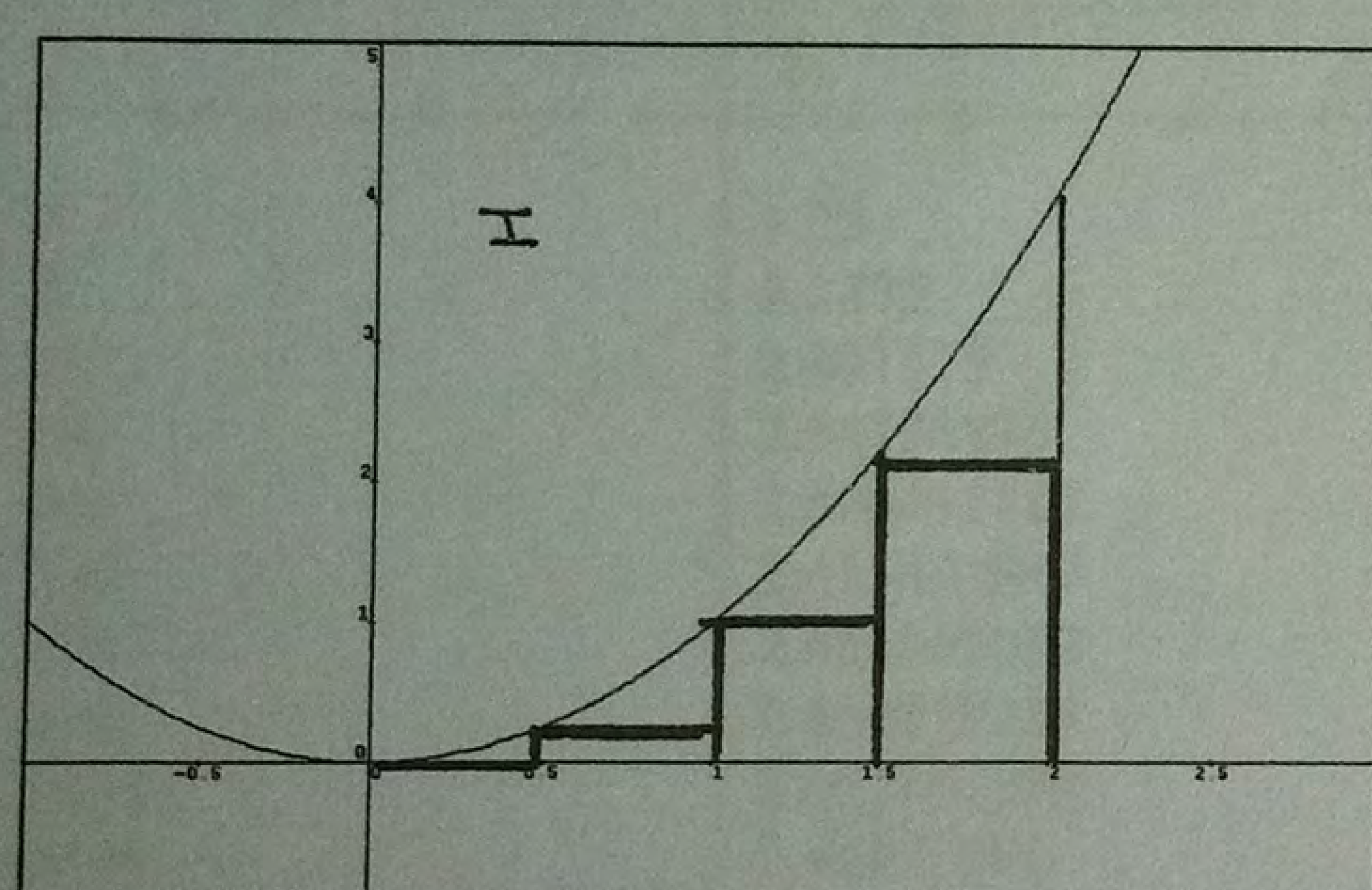
# CHAPITRE 7. INEGRALES DEFINIES

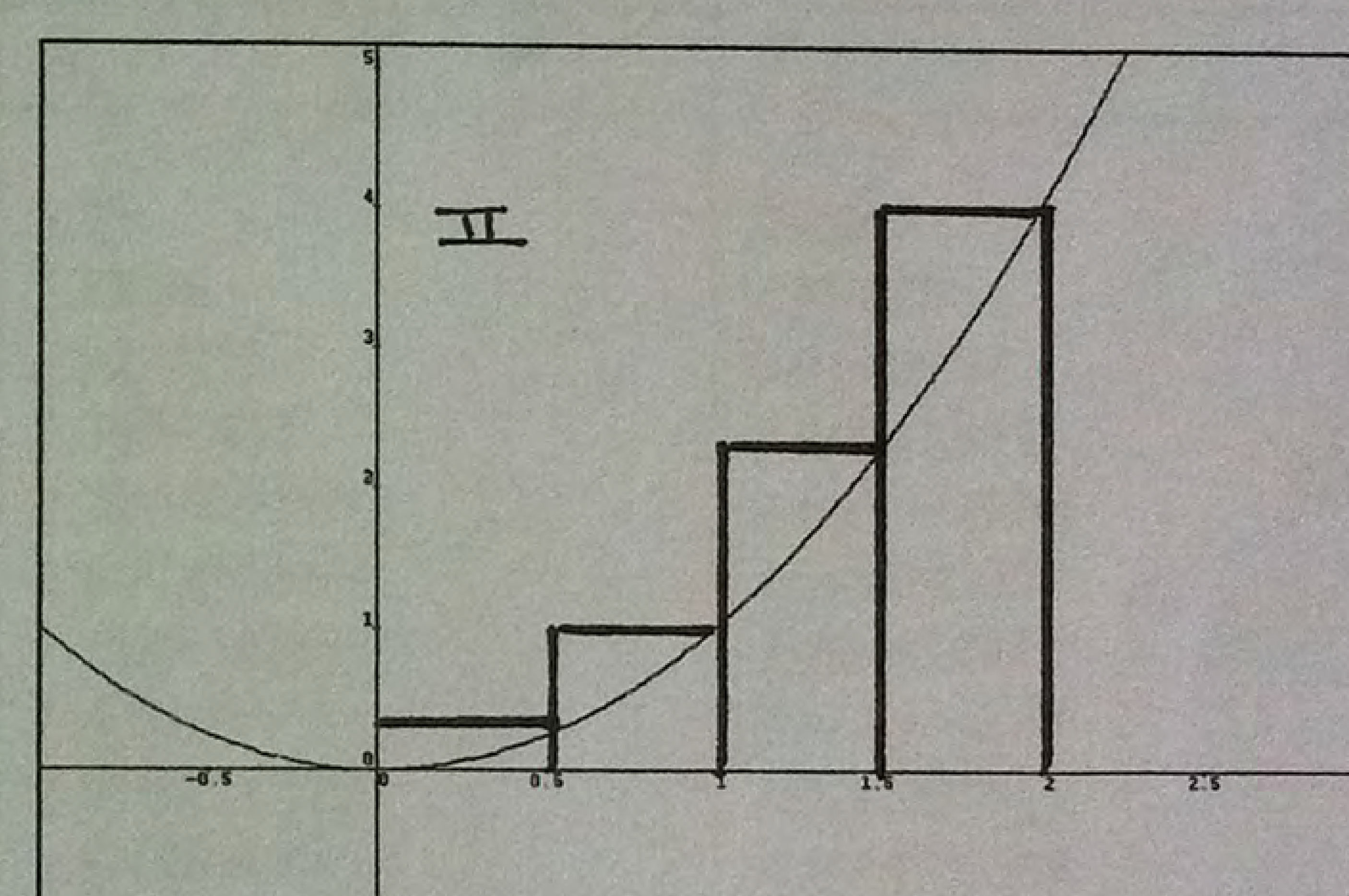
## 1. Approche intuitive : calcul d'aires

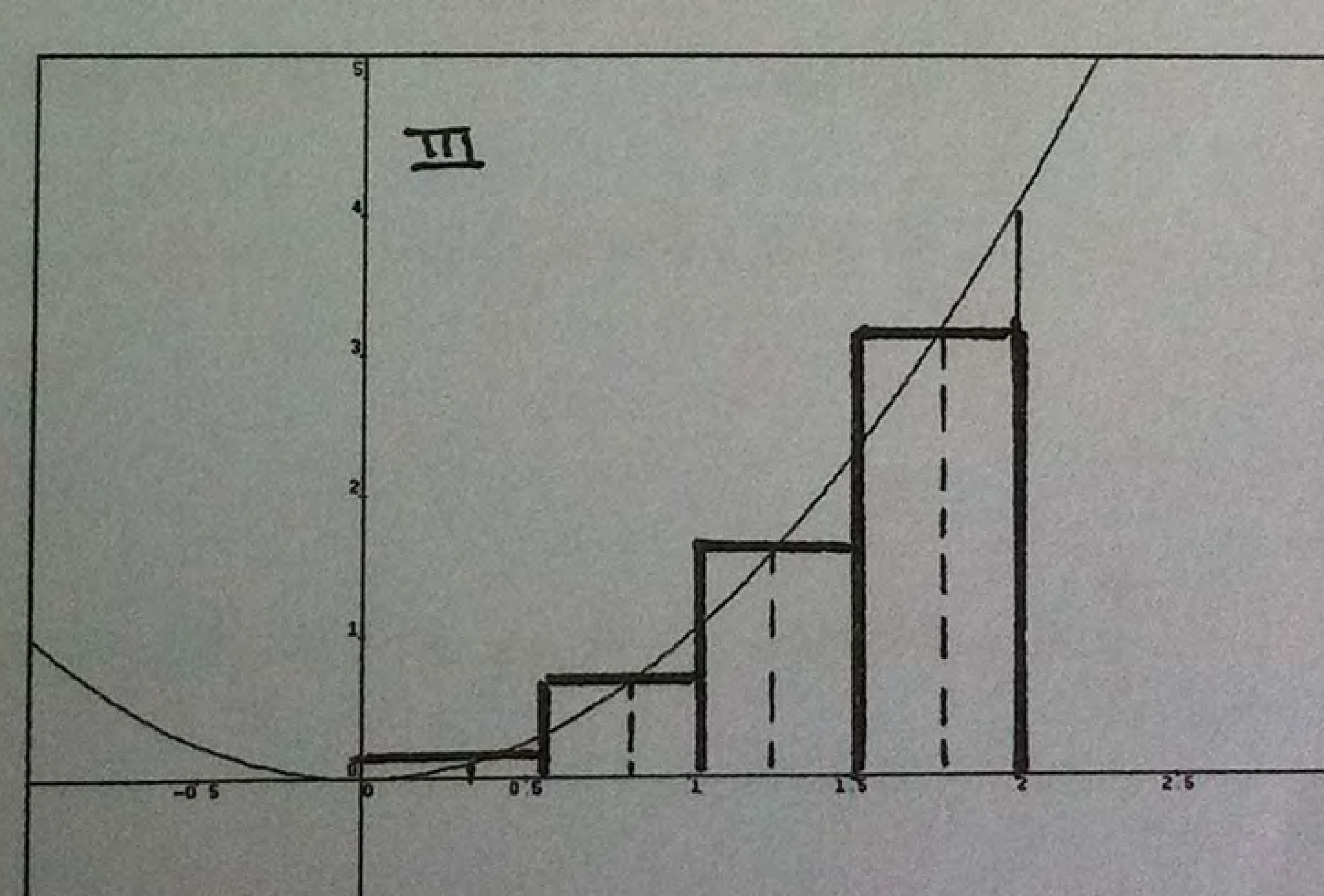
On se propose de calculer l'aire S limitée par la courbe d'équation $y = x^2$, l'axe X, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.




Nous allons tenter une approximation de S par des rectangles, en subdivisant l'intervalle [0,2] en 4 sous intervalles. A chaque fois nous allons construire des rectangles de base identique selon les procédés suivants.




L'aire I approche S par défaut, l'aire II par excès et l'aire III d'une manière moyenne.

Notons $S_i$ l'aire I ; $S_s$ l'aire II et $S_m$ l'aire III et calculons les.

$$S_i = f(0).\frac{1}{2} + f(\frac{1}{2}).\frac{1}{2} + f(1).\frac{1}{2} + f(\frac{3}{2}).\frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{4}.\frac{1}{2} + 1.\frac{1}{2.} + \frac{9}{4}.\frac{1}{2} = \frac{14}{8} = 1.75$$

$$S_s = f(\frac{1}{2}).\frac{1}{2} + f(1).\frac{1}{2} + f(\frac{3}{2}).\frac{1}{2} + f(2).\frac{1}{2} = 3.75$$

$$S_m = f(\frac{1}{4}).\frac{1}{2} + f(\frac{3}{4}).\frac{1}{2} + f(\frac{5}{4}).\frac{1}{2} + f(\frac{7}{4}).\frac{1}{2} = 2.625$$

Dans cette subdivision, le nombre de sous intervalles de [ 0 ;2] est de 4.

**Dans chaque situation, l'approximation de S sera d'autant meilleure que le nombre de sous intervalles augmente.**

A l'aide d'une calculatrice et de beaucoup de patience, on peut construire la tableau suivant où n représente le nombre de sous intervalles de [ 0 ;2] .

| n | $S_i$ | $S_s$ | $S_m$ |
|---|---|---|---|
| 4 | 1.75 | 3.75 | 2.625 |
| 8 | 2.1875 | 3.1875 | 2.65625 |
| 16 | 2.421875 | 2.921875 | 2.6640625 |
| 32 | 2.54296875 | 2.7926875 | 2.666015625 |
| 64 | 2.604492188 | 2.729492188 | 2.666503906 |
| 128 | 2.635498047 | 2.697998047 | 2.666625977 |
| 256 | 2.651062012 | 2.682312012 | 2.666656494 |
| 512 | 2.658859253 | 2.674484253 | 2.666664124 |
| 1024 | 2.662761688 | 2.670574188 | 2.666666931 |
| 2048 | 2.66471386 | 2.66862011 | 2.666666509 |
| … | | | |
| … | | | |
| … | | | |
| 32768 | 2.666544598 | 2.666788738 | 2.666666666 |
| … | … | … | … |

Nous constatons que

$$\lim_{n\to+\infty} S_i = \lim_{n\leftarrow+\infty} S_s = \lim_{n\to+\infty} S_m = 2.6666.... = \frac{8}{3}$$

Et que finalement

$$S = \frac{8}{3}$$

## 2. Intégrale définie d'une fonction continue

Soit f une fonction continue définie su r [ a : b ] .

Effectuons une subdivision de cet intervalle en n sous intervalles en choisissant de façon arbitraire des points

$s_k \in [a;b]$ $\quad k = 1,2,3,\ldots,n-1,n$ $\quad a = s_0 < s_1 < s_2 < \ldots\ldots < s_{n-1} < s_n = b$

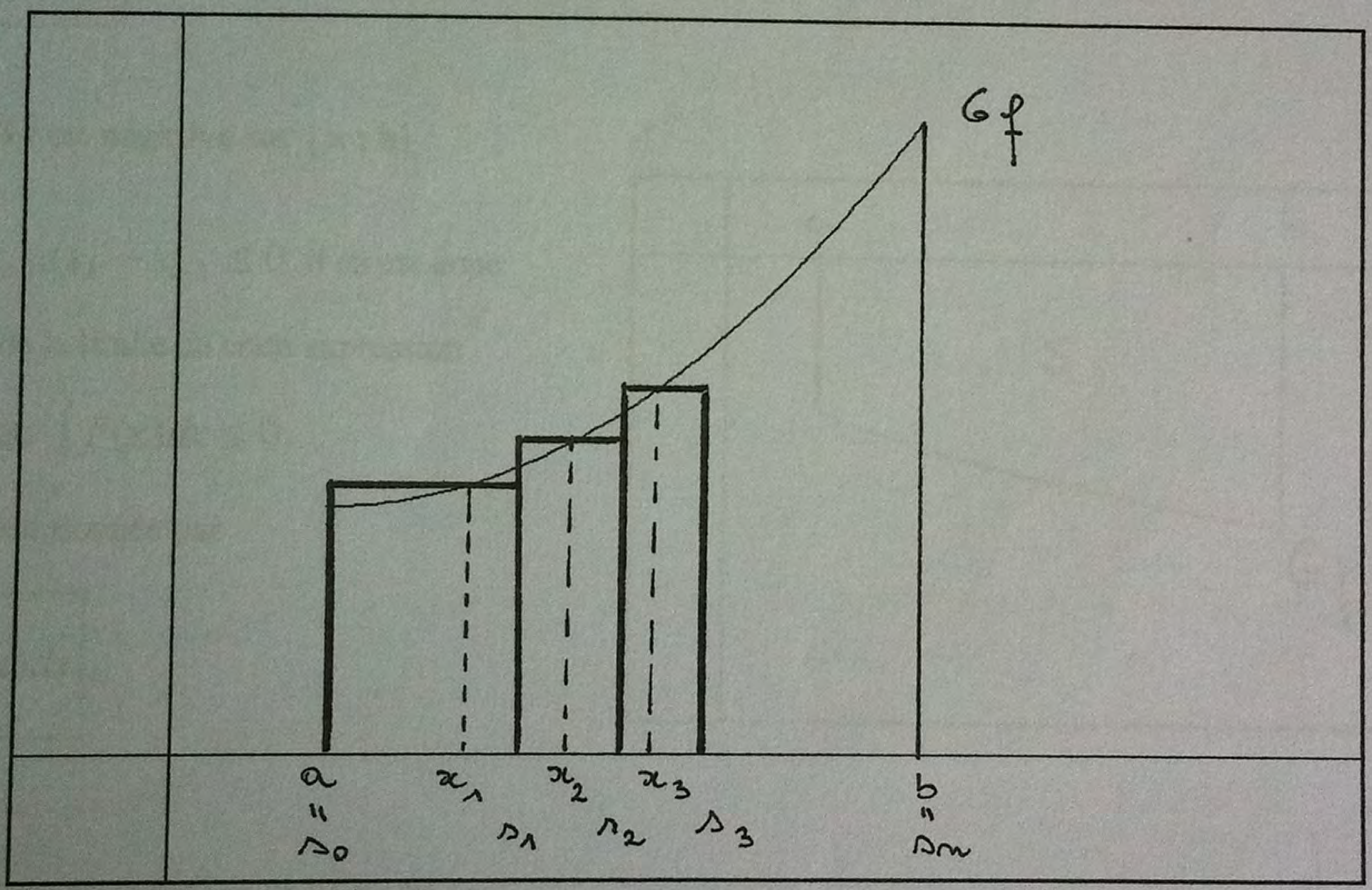
Dans chaque intervalle du type $[s_{k-1}; s_k[$ choisissons de façon arbitraire un point $x_k$ et construisons une somme de type $S_m$.

Les intervalles $[s_{k-1}; s_k[$ ne sont donc pas forcément de même longueur et le point $x_k$ n'en est pas forcément le centre.

$$S_m = f(x_1).(s_1 - s_0) + f(x_2).(s_2 - s_1) + \ldots.. + f(x_n).(s_n - s_{n-1})$$

$$S_m = \sum_{k=1}^{n} f(x_k).(s_k - s_{k-1})$$

Augmentons le nombre de sous intervalle de manière à ce que n tende vers l'infini et que la longueur des sous intervalles $[s_{k-1}; s_k[$ tende vers zéro.




On peut démontrer que

$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k).(s_k - s_{k-1})$ existe et est indépendante du choix des points $s_k \in [a;b]$ et $x_k$

**Par définition, cette limite s'appelle l'intégrale défini e de la fonction sur l'intervalle [ a ; b ]**
**Et l'on écrit**

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k).(s_k - s_{k-1}) = \int_a^b f(x)dx}$$

**On dit encore que a et b sont les bornes de l'intégrale.**

## 3. Interprétation géométrique de l'intégrale définie

Soit f une fonction continue sur [ a ; b ] et S l'aire de la partie du plan limitée par $G_f$, l'axe X et les droites x = a et x = b. Il existe un lien entre la mesure de S et la valeur de l'intégrale.

Trois cas sont possibles :

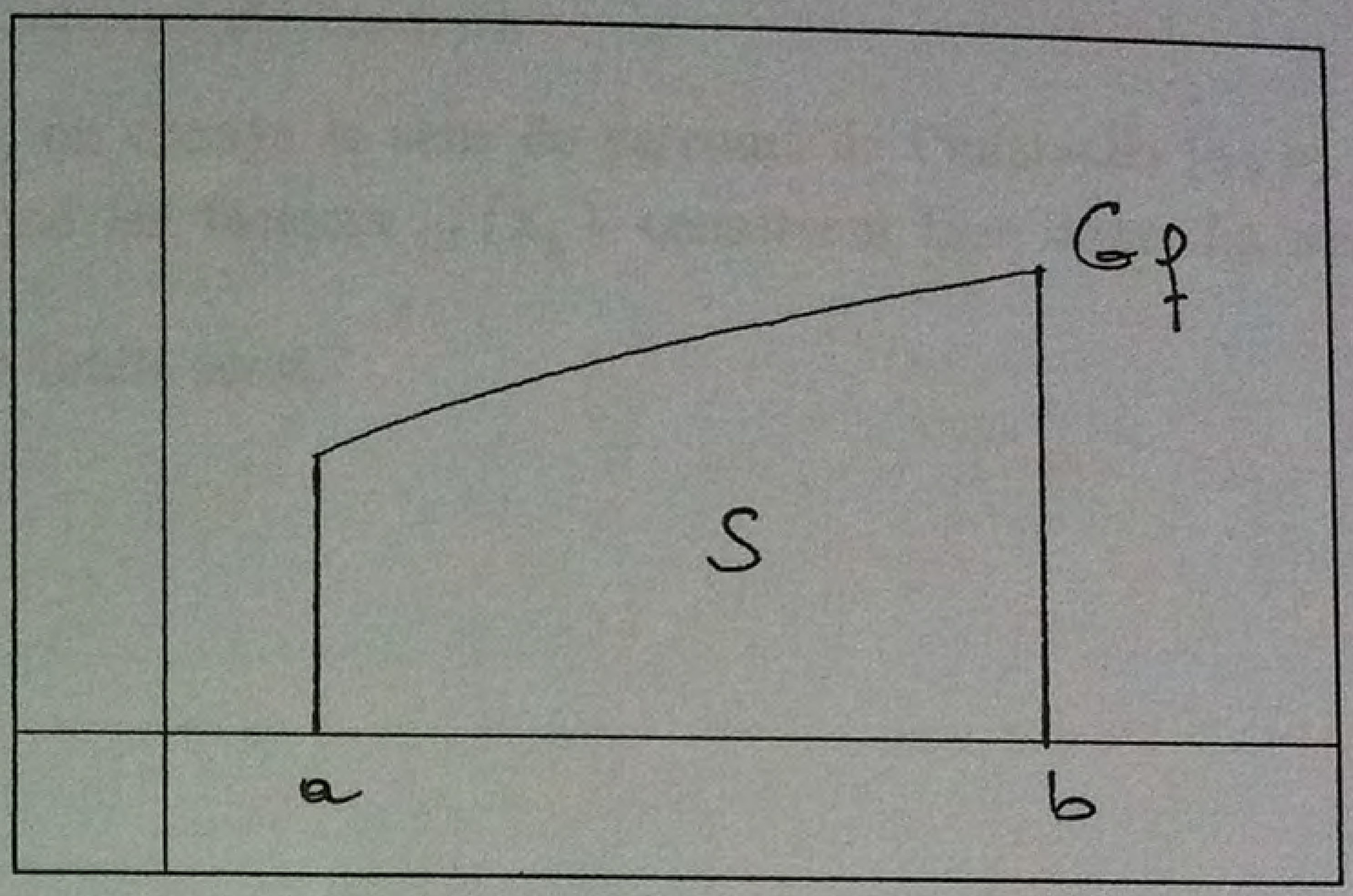
**Cas 1. Si f est positive sur [ a ; b]**

$\sum_{k=1}^{n} f(x_k).(s_k - s_{k-1}) \geq 0$ il en est donc de même de la limite de cette expression

et de ce fait, $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

et l'aire S est donnée par

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx}$$



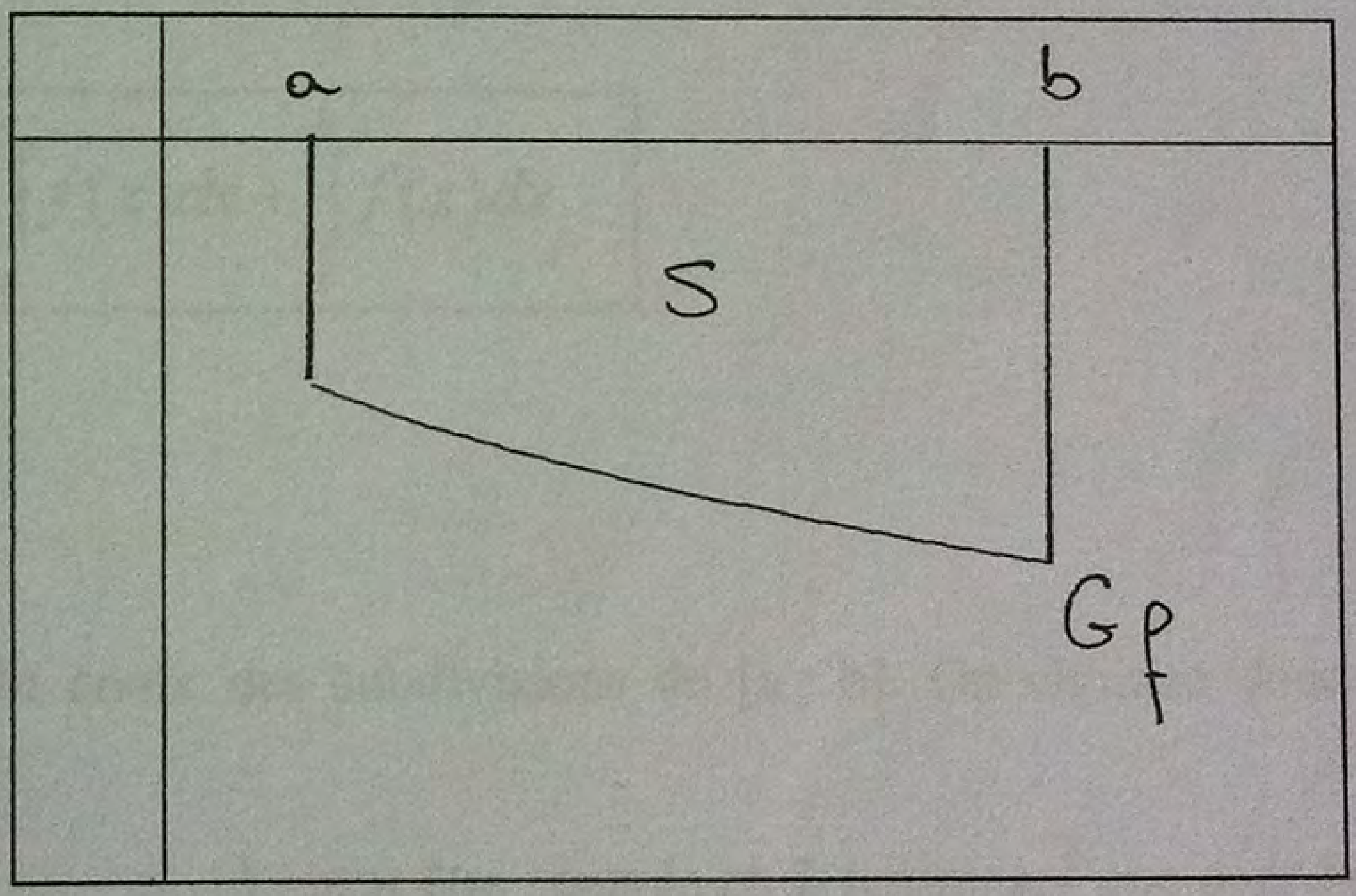

**Cas 2. Si f est négative sur [ a ; b]**

$\sum_{k=1}^{n} f(x_k).(s_k - s_{k-1} \leq 0$ il en est donc de même de la limite de cette expression

et de ce fait, $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

et l'aire S est donnée par

$$\boxed{S = - \int_a^b f(x)dx}$$

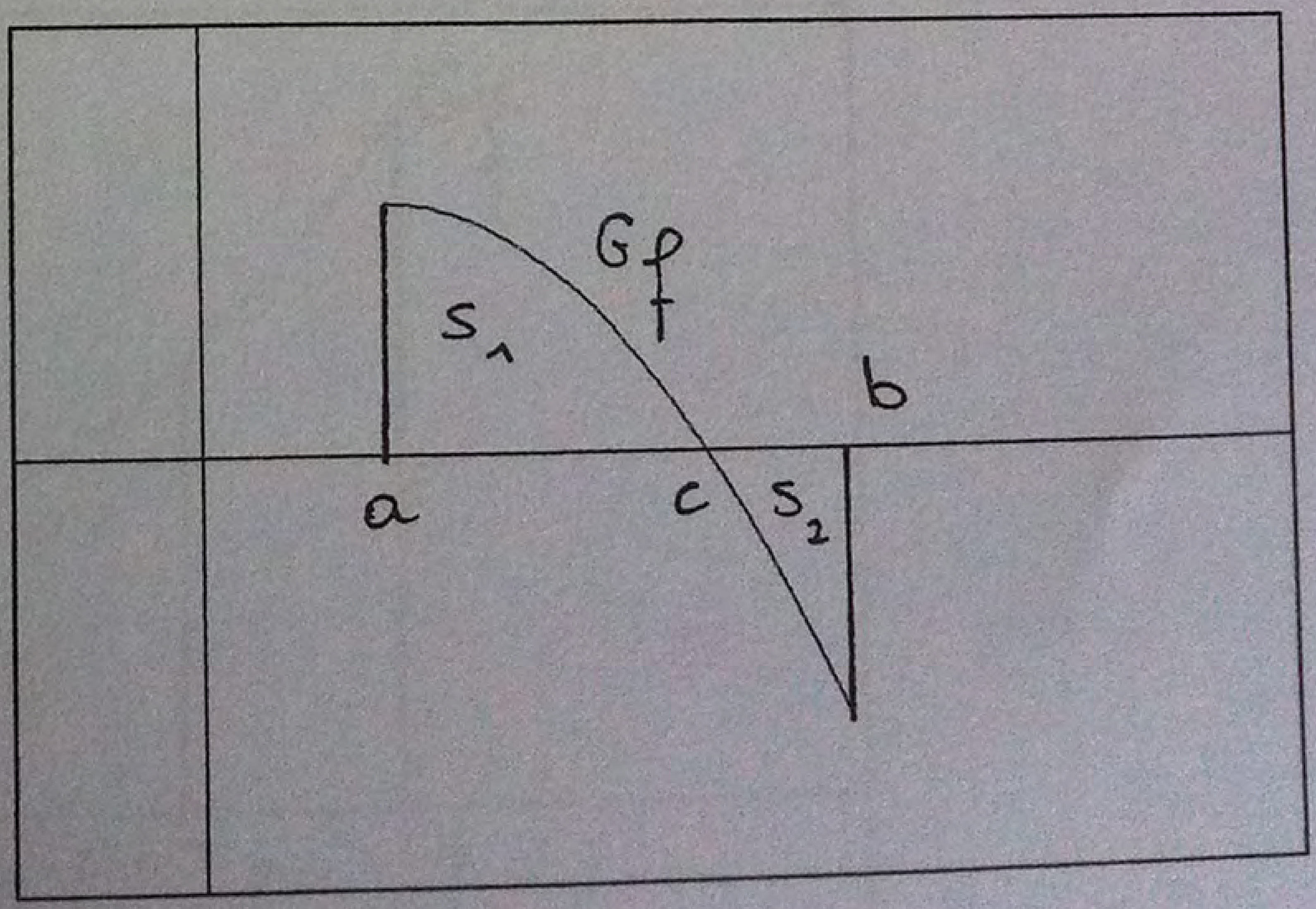



**Cas 3. Si f est quelconque sur [ a ; b]**

Il faut distinguer les sous - intervalles où f est positive et ceux où f est négative et l'intégrale de a à b ne représente plus la mesure de S.

$S = S_1 + S_2$

$$\boxed{S = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx}$$



## 4. Propriétés de l'intégrale définie

### 4.1. Permutation des bornes

La permutation des bornes de l'intégrale définie change le signe de cette intégrale.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}$$

En effet, si l'on change les bornes de l'intégrale, on change le sens de parcours de l'intervalle [a ; b]. Les facteurs $(s_k - s_{k-1})$ changent de signe tandis que les facteurs $f(x_k)$ conservent leur signe. La somme $\sum_{k=1}^{n} f(x_k).(s_k - s_{k-1})$ change donc de signe et sa limite aussi.

**Cas particulier :**

$$\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}$$

Ceci est une conséquence immédiate de la propriété précédente

### 4.2. Additivité de l'intégrale définie

Pour tout réel c de [a ; b], on a :

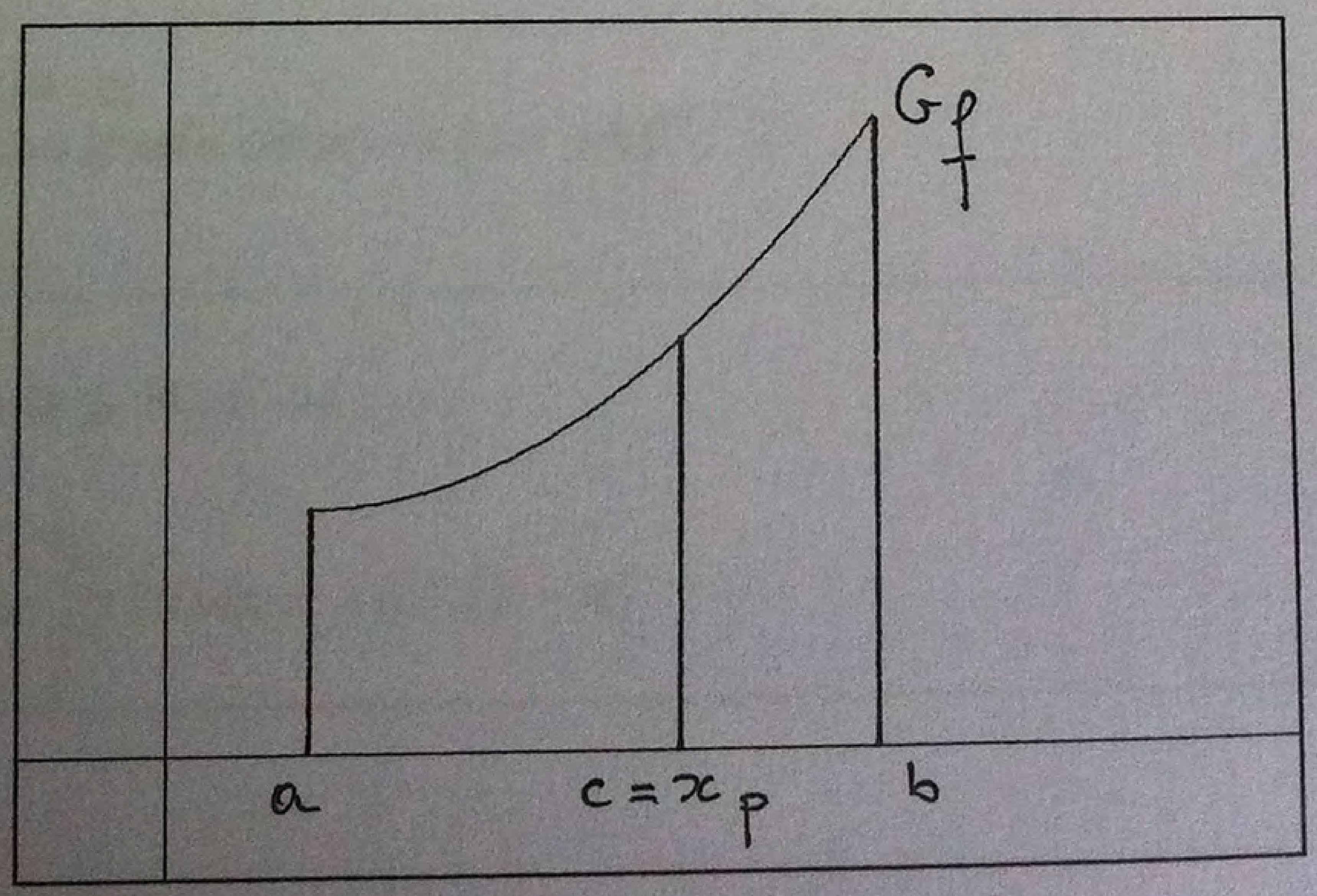
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$$

En effet,

Calculons $.\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k).(s_k - s_{k-1})$

Nous savons que cette limite est indépendante du choix des subdivisions de [a ; b]. On choisira donc des subdivisions comprenant c.

Dans ce cas, chaque somme obtenue $\sum_{k=1}^{n} f(x_k).(s_k - s_{k-1})$ peut être séparée en 2 sommes, l'une pour [a ; c] et l'autre pour [c ; b].



Notons, par exemple $c = x_p$.

On a dès lors que : $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(s_k - s_{k-1}) = \sum_{k=1}^{p} f(x_k)(s_k - s_{k-1}) + \sum_{k=p}^{n} f(x_k)(s_k - s_{k-1})$

En passant aux limites, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(s_k - s_{k-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{p} f(x_k)(s_k - s_{k-1}) + \sum_{k=p}^{n} f(x_k)(s_k - s_{k-1})\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{p} f(x_k)(s_{ki} - s_{k-1}) + \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=p}^{n} f(x_k)(s_k - s_{k-1}) \\
&= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx
\end{aligned}$$

### 4.3 Linéarité de l'intégrale définie

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx. \text{ où } k \text{ est réel}$$

Ces propriétés résultent directement des propriétés des limites.

## 5. Lien entre intégrale définie et primitive

Jusqu'ici, nous n'avons pas donné une méthode simple pour calculer les intégrales définies. Dans exemple numérique traité au point précédent, l'intégrale définie a été obtenue au prix de longs calculs. Dans ce qui suit, pour éviter cela, nous allons tâcher de trouver un moyen de calculer immédiatement les intégrales définies.

### 5.1 Théorème de la moyenne

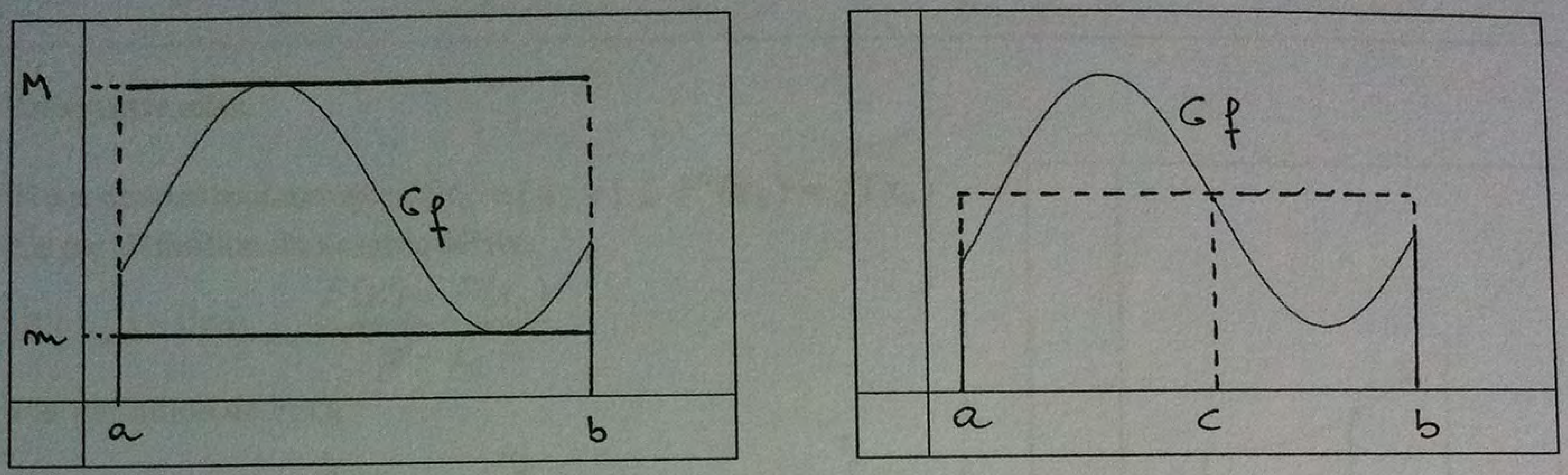
Soit f une fonction continue sur [a ; b]
Soit m et M la plus petite et la plus grande valeurs de f sur [a;b]

1) $m.(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M.(b - a)$

2) $\exists\ c \in [a\ ;b]$ tel que : $\int_a^b f(x)dx = f(c).(b-a)$

**Interprétation géométrique**

Dans le cas où f est une fonction positive sur [a;b], ce théorème peut s'interpréter facilement d' un point de vue géométrique.
L'aire comprise entre le graphe de f, l'axe X et les droites d'équations x = a et x = b est comprise entre l'aire du rectangle de hauteur m et l'aire du rectangle de hauteur M construits sur [a;b].




Il doit exister un point intermédiaire c tel que l'aire comprise entre le graphe de f, l'axe X et les droites d'équations x = a et x = b soit égale à $f(c).(b-a) = \int_a^b f(x)dx$

On dit encore que

| |
|---|
| La valeur moyenne de la fonction f sur [a ; b] est $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ |

**Démonstration**

Premier point du théorème :

$$\sum_{k=1}^{n} m(s_k - s_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(s_k - s_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} M(s_k - s_{k-1})$$

$$m(b-a) \leq \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(s_k - s_{k-1}) \leq M(b-a)$$

en passant à la limite pour $n \to +\infty$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Deuxième point du théorème :

Par le point 1, $m \leq \dfrac{1}{b-a}.\int_a^b f(x)dx \leq M$

Comme f est continue et que m et M sont des valeurs prises par f, $\dfrac{1}{b-a}.\int_a^b f(x)\,dx$ est aussi une valeur prise par f; il existe donc c dans [a;b] tel que

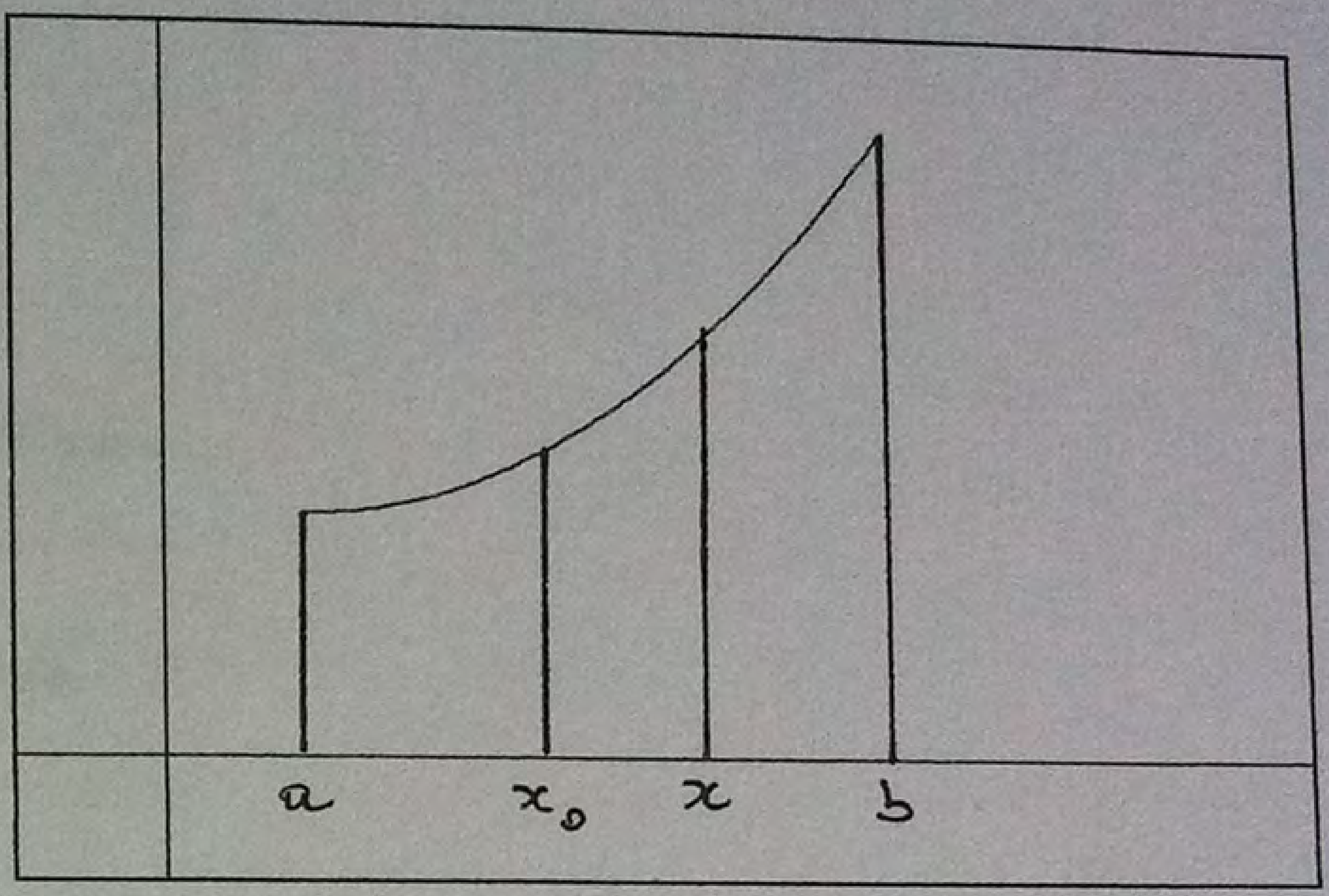
$$f(c) = \frac{1}{b-a}.\int_a^b f(x)\,dx$$

## 5.2 Lien entre l'intégrale définie et la primitive.

**Théorème préliminaire**

> **Soit f une fonction continue sur [a ; b] ; alors**
> **La fonction** $F : x \to F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ **est une primitive de f**

**Démonstration**




Nous devons montrer que $\forall x_0 \in [\, a\, ;\, x\, ]$ , $F'(x_0) = f(x_0)$
Or par définition du nombre dérivé,

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$$

Par définition de F(x),

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\int_{x_0}^x f(t)dt}{x - x_0}$$

Or, par le théorème de la moyenne, il existe c dans $[x; x_0]$ tel que :

$$\int_{x_0}^x f(t)dt = f(c).(x - x_0)$$

Donc, $F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(c) = f(x_0)$

**Formule de Newton-Leibniz : Lien entre intégrale définie et primitive**

> **Si f est une fonction continue sur [a ; b]**
> **Si F(x) est une primitive quelconque de f(x) sur [a ; b]**
> **Alors, on a pour tout x dans [a ; b]**
>
> $$\int_a^x f(t)\, dt = F(x) - F(a)$$
>
> **En particulier,** $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ **notée** $\left[F(x)\right]_a^b$

**Démonstration**

Si G(x)= $\int_a^x f(t)dt$ , nous savons que G est une primitive de f, par le théorème précédent.

Dès lors, comme F est aussi primitive de f, G(x) - F(x) = k et donc $\int_a^x f(t)dt = F(x) + k$

Dans le cas particulier où x = a, $\int_a^a f(t)dt = 0 = F(a) + k$ , donc $k = -F(a)$

Nous pouvons dès lors conclure que : $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$

## 6. Calcul d'intégrales définies

Le calcul d'une intégrale définie se ramène au calcul des primitives et nécessite ensuite de prendre la différence des valeurs de celles-ci aux bornes.

**Intégration immédiate**

1) $\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}$

2) $\int_0^\pi \sin x dx = \left[-\cos x\right]_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2$

**Intégration par parties**

La formule vue pour les intégrales indéfinies s'étend aux intégrales définies.

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx}$$

$$I = \int_0^1 x e^x dx$$

$f(x) = x \qquad f'(x) = 1$

$g'(x) = e^x \qquad g(x) = e^x$

$$I = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = (e-0) - (e-1) = 1$$

**Intégration par changement de variable**

Un changement de variable implique un changement de bornes d'intégration.

$$I = \int_0^1 (3x+10)^7 dx$$

$t = 3x + 10 \qquad dt = 3dx$

$si \quad x = 0 \quad alors \quad t = 10$

$si \quad x = 1 \quad alors \quad t = 13$

$$I = \int_0^1 (3x+10)^7 dx = \frac{1}{3}\left[\frac{t^8}{8}\right]_{10}^{13} = \frac{1}{24}\left(13^8 - 10^8\right)$$

Lorsqu'on effectue un changement de bornes, il ne faut pas exprimer le résultat dans la variable initiale.

Il est aussi possible d'écrire

$$I = \int_0^1 (3x+10)^7 dx = \frac{1}{3}\left[\frac{(3x+10)^8}{8}\right]_0^1$$

## EXERCICES

1. Calculer

1) $\int_{-1}^{1} 9x^2dx =$

5) $\int_{-0,25}^{0,25} \frac{4x}{1+16x^2}dx =$

9) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}dx =$

2) $\int_{1}^{2} \frac{5}{7\sqrt{x}}dx =$

6) $\int_{0}^{2} (1-x)^2dx =$

10) $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2-4x+4}dx =$

3) $\int_{-2}^{-1} (1-2x)dx =$

7) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos 4x dx =$

11) $\int_{1}^{8} (\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 7\sqrt[3]{x})dx =$

4) $\int_{0}^{0,5} \frac{3x^2}{(x^3-1)^4}dx =$

8) $\int_{-1}^{0} \frac{-dx}{\sqrt{1-x}} =$

12) $\int_{0}^{1} 10x(x^2+1)^4 dx =$

Réponses: $\underbrace{6}_{1}\ ;\ \underbrace{10(\sqrt{2}-1)/7}_{2}\ ;\ \underbrace{4}_{3}\ ;\ \underbrace{169/1029}_{4}\ ;\ \underbrace{0}_{5}\ ;\ \underbrace{2/3}_{6}\ ;\ \underbrace{0}_{7}\ ;\ \underbrace{2(1-\sqrt{2})}_{8}\ ;\ \underbrace{1-\frac{\sqrt{3}}{3}+\pi/12}_{9}\ ;\ \underbrace{1/6}_{10}\ ;\ \underbrace{333/4}_{11}\ ;\ \underbrace{31}_{12}.$

2. Soit v (t) = 0,12 $t^2$ m/s la formule de la vitesse d'une fusée qui quitte la terre
Quelle sera sa hauteur après 2 minutes de vol ? (rép. : 69.12km)

3. La vitesse d'un mouvement rectiligne est proportionnelle au carré du temps.
Elle est égale à 1cm/s à la fin de 4ème seconde.
Calculer la distance parcourue sur un axe pendant les 10 premières secondes. (rép. : 0,20833m )

4. Un mobile se déplace sur un axe avec une accélération constante de 0,5 m/s$^2$.
Déterminer
a) sa vitesse à l'instant 3 si on sait que sa vitesse à l'instant 1 est 2 m/s.
b) sa position à l'instant 3 si on sait qu'il est au point d'abscisse 3 à l'instant 1. (rép. : a) 3m/s b) 8 m )

5. Un morceau de rocher tombe d'une hauteur de 100 mètres avec une vitesse initiale de 9 m/sec.
a) à quelle hauteur se trouvera-t-il après t secondes ?
b) après combien de temps atteint-il le sol ?
c) quelle est sa vitesse lorsqu'il touche le sol ? (rép. : b) 3,661sec c) 45,61m/sec )

6. Une firme de leasing a constaté que les coûts de maintenance en euros d'une photocopieuse augmentaient au cours du temps selon la loi
$C(t) = 300 + 150t^2$ où t représente le temps exprimé en années.
Cette firme souhaite louer à un client une machine vielle d'un an pour une période de 3 ans à un loyer annuel fixe. A quel montant minimum doit elle fixer le loyer pour couvrir les frais de maintenance. ? (rép. 1350 €)

7. La vitesse de l'eau d'une rivière varie en fonction de la profondeur.
Elle est approximativement donnée par la loi
$$v(x) = c\sqrt[6]{p-x}$$
où v est la vitesse en m/s à une profondeur de x mètres sous la surface, p est la profondeur de la rivière et c une constante positive.

a) Trouver une formule qui donne la vitesse moyenne en fonction de p et c.
b) Montrer que
$$v_{moy} = \frac{6}{7}v_0 \quad \text{où } v_0 \text{ est la vitesse de l'eau à la surface.}$$

# CHAPITRE 8. QUADRATURES ET CUBATURES

## 1. Quadratures

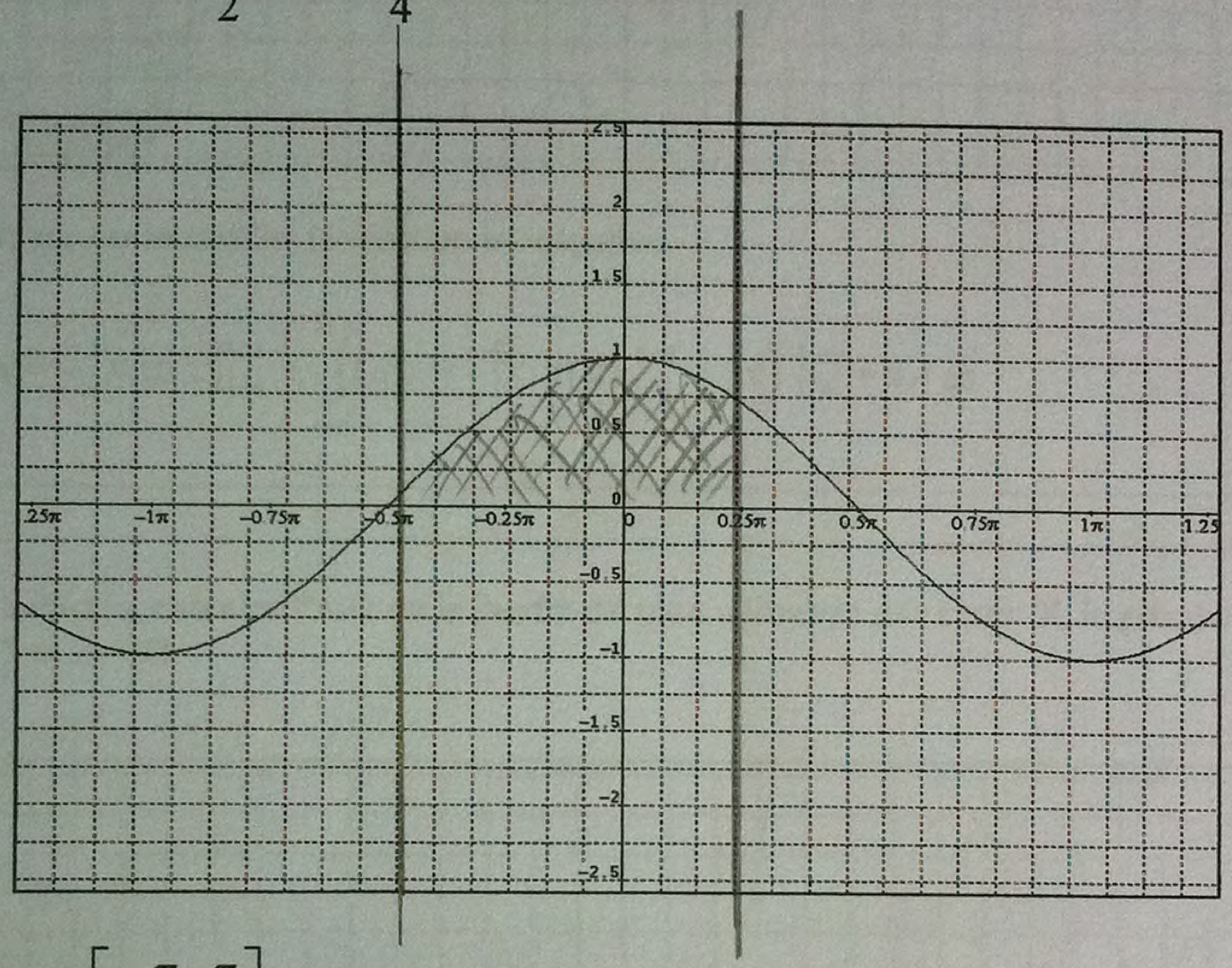
On appelle quadrature, le calcul de l'aire de régions du plan limitées par des droites ou des courbes.

### 1.1 Aire limitée par une courbe

**Exemple 1**

**Après l'avoir hachurée, calculer l'aire de la partie du plan délimitée par**

**l'axe X, les droites** $x = -\dfrac{\pi}{2}$ **et** $x = \dfrac{\pi}{4}$ **ainsi que le graphe de f (x) = cos x.**



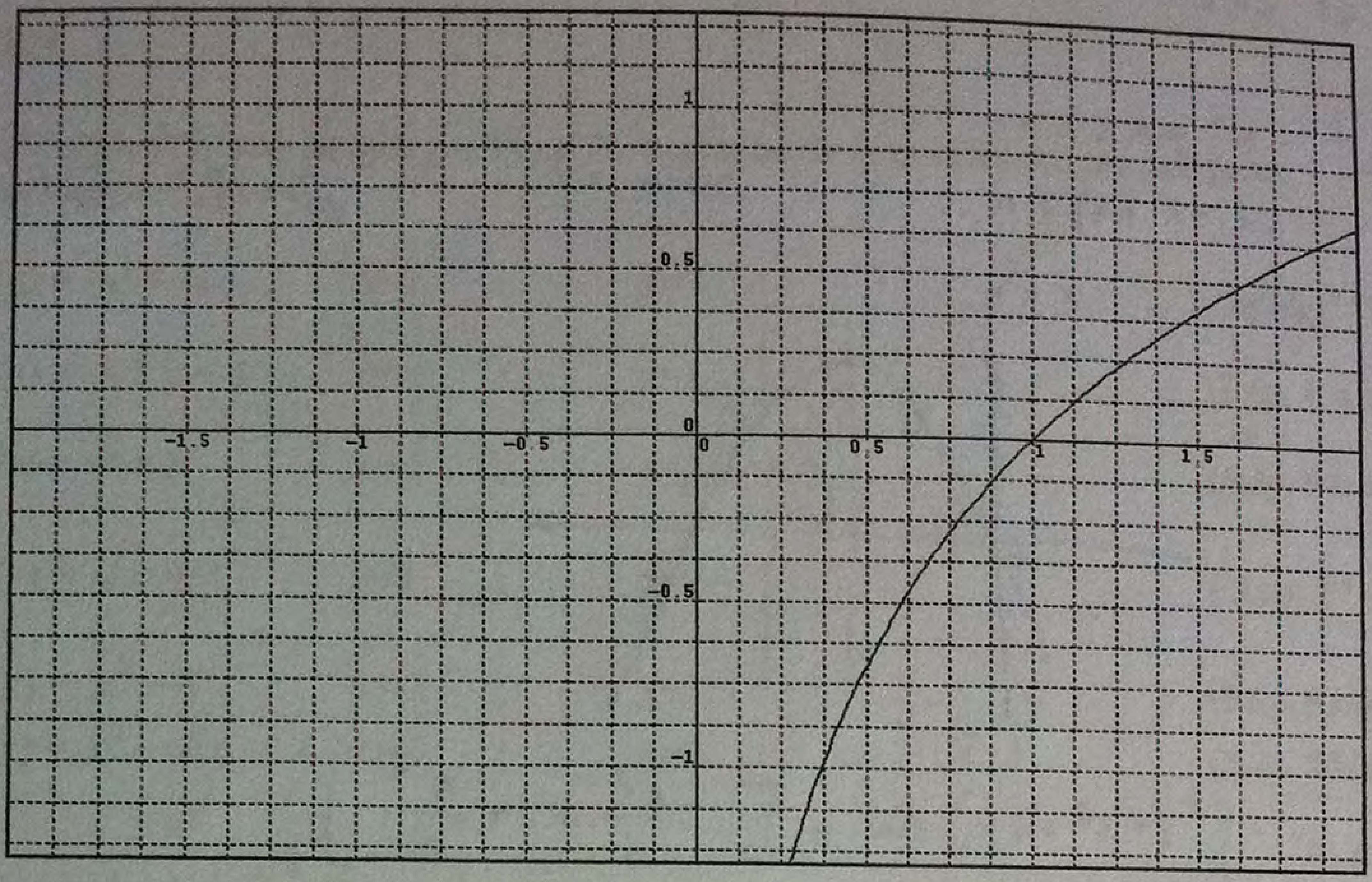
On remarque que sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{4}\right]$ la fonction est positive.

$$A = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = \left[\sin x\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = \sin\frac{\pi}{4} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - (-1) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.7 \text{ unités de surface.}$$

**Exemple 2**

**Après l'avoir hachurée, calculer l'aire de la partie du plan délimitée par**

**l'axe X , le graphe de f (x) = ln x et les droites** $x = \dfrac{1}{4}$ **et** $x = \dfrac{7}{8}$

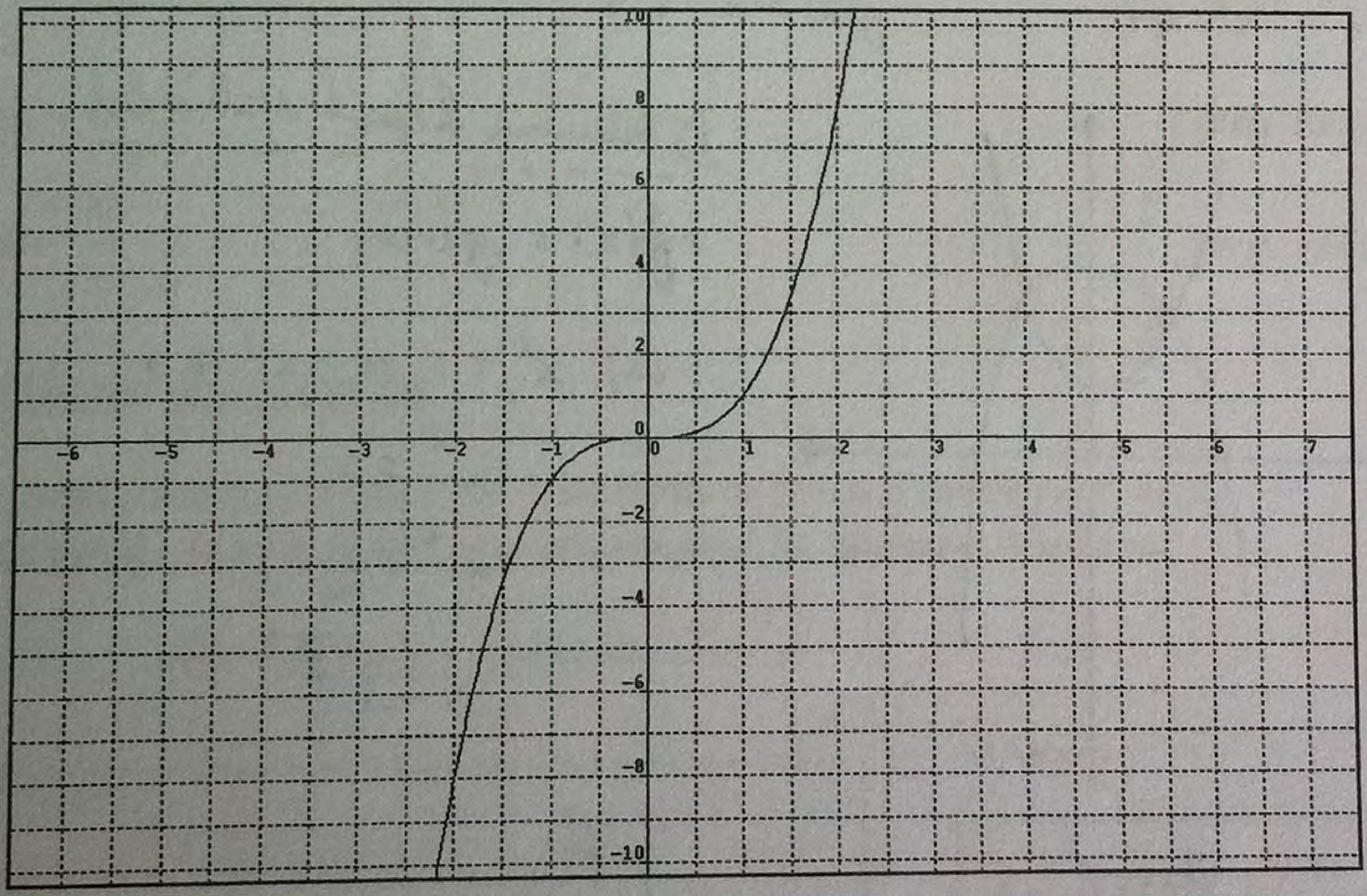



On remarque que sur cet intervalle, la fonction est négative.

$$A = -\int_{1/4}^{7/8} \ln x dx = -\left[x.\ln x\right]_{1/4}^{7/8} + \int_{1/4}^{7/8} 1\, dx = -\left[x.\ln x\right]_{1/4}^{7/8} + \left[x\right]_{1/4}^{7/8} = 0.4 \text{ us}$$

**Exemple 3**

**Après l'avoir hachurée, calculer l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe X, le graphe de f (x) = x³ et les droites x =- 2 et x= 3/2**




On remarque que sur la fonction est négative sur l'intervalle [-2 ; 0 ]
et qu'elle est positive sur l'intervalle [0 ; 3/2]

$$A = -\int_{-2}^{0} x^3 dx + \int_{0}^{3/2} x^3 dx = -\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{3/2} = 4 + 1{,}265625 = 5{,}265625 \text{ us}$$

**EXERCICES**

1. Représenter la région du plan bornée par l'axe X, le graphe de f (x) et les droites indiquées. Calculer les aires de ces régions.

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) $f(x) = -x^2 + 4x$ | $x=2$ ; | $x=3$ | (Rép. 11/3 u.s.) |
| b) $f(x) = -4/3\,x + 4$ | $x=-1$ ; | $x=1$ | (Rép. 8 u.s.) |
| c) $f(x) = x^2 + 2$ | $x=-1$ ; | $x=2$ | (Rép. 9 u.s.) |
| d) $f(x) = \sqrt{x} + 1$ | $x=0$ ; | $x=9$ | ( Rep. 27 u.s.) |
| e) $f(x) = x^3 - 1$ | $x=-2$ ; | $x=3$ | (Rép. 93/4 u.s.) |
| f) $f(x) = x^2 - 4x$ | $x=-1$ ; | $x=2$ | (Rép. 23/3 u.s.) |

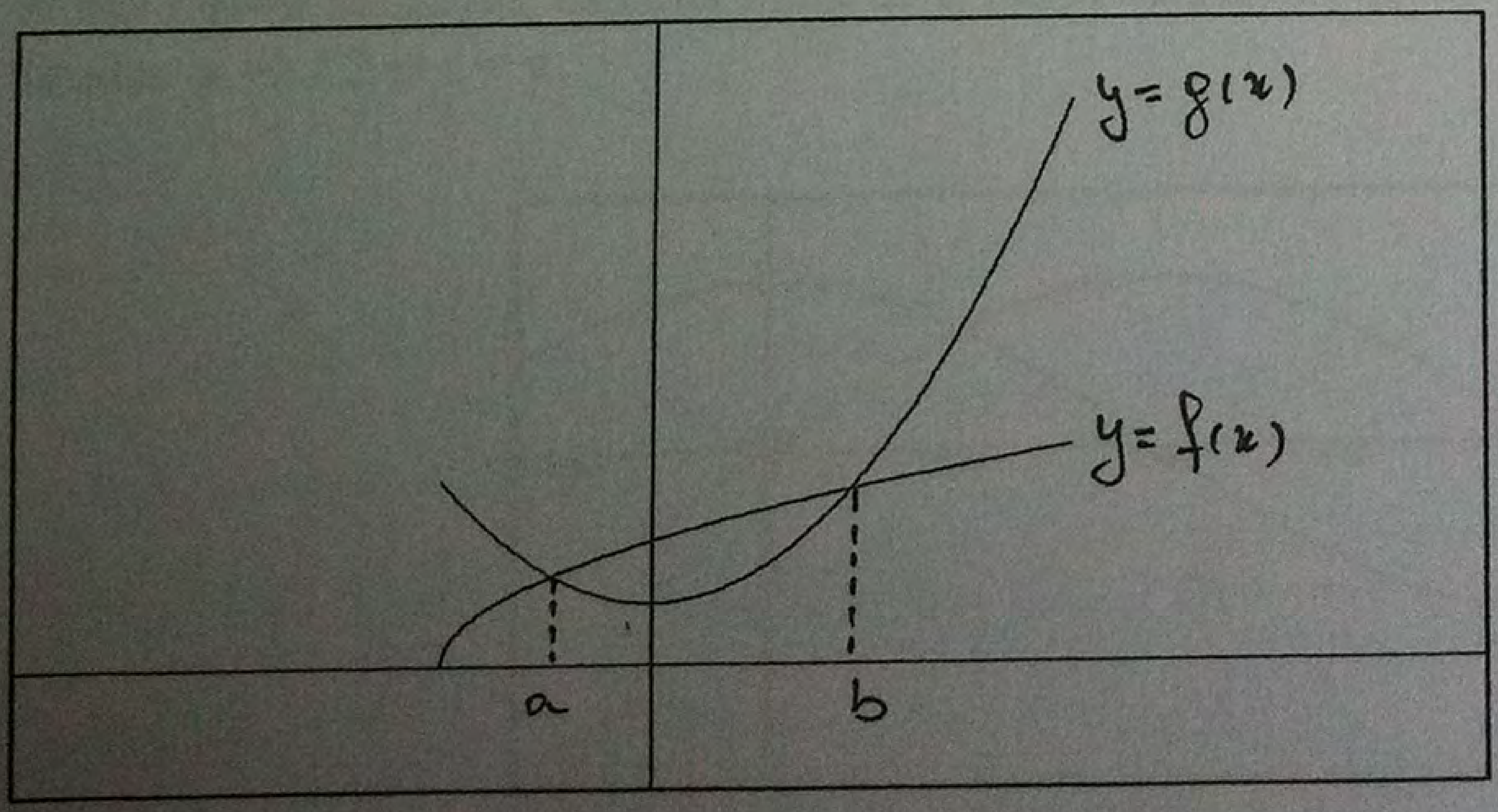
2. Sans tracer le graphe de la fonction, mais en ayant recours à un raisonnement algébrique, déterminer les aires des régions du plan bornées par l'axe X, le graphe de f(x) et les droites indiquées.

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ | $x=2$ ; | $x=4$ | (Rép. 1/4 u.s.) |
| b) $f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$ | $x=1$ ; | $x=3$ | (Rép. 2/21 u.s.) |
| c) $f(x) = \sqrt{2x+1}$ | $x=0$ ; | $x=4$ | (Rép. 26/3 u.s.) |
| d) $f(x) = -x^2 + x + 2$ | $x=-2$ ; | $x=3$ | (Rép. 49/6 u.s.) |
| e) $f(x) = \dfrac{1+x^3}{x^2}$ | $x=-3$ ; | $x=-1$ | (Rép. 10/3 u.s.) |
| f) $f(x) = \dfrac{4}{x}$ | $x=2$ ; | $x=5$ | (Rép. 3,665 u.s.) |

## 1.2 Aire limitée par deux courbes

Examinons à présent comment calculer l'aire d'une partie de plan non bordée par l'axe X.
Il vient aisément que si $f(x) \geq g(x)$ l'aire comprise entre les courbes et donnée par

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$



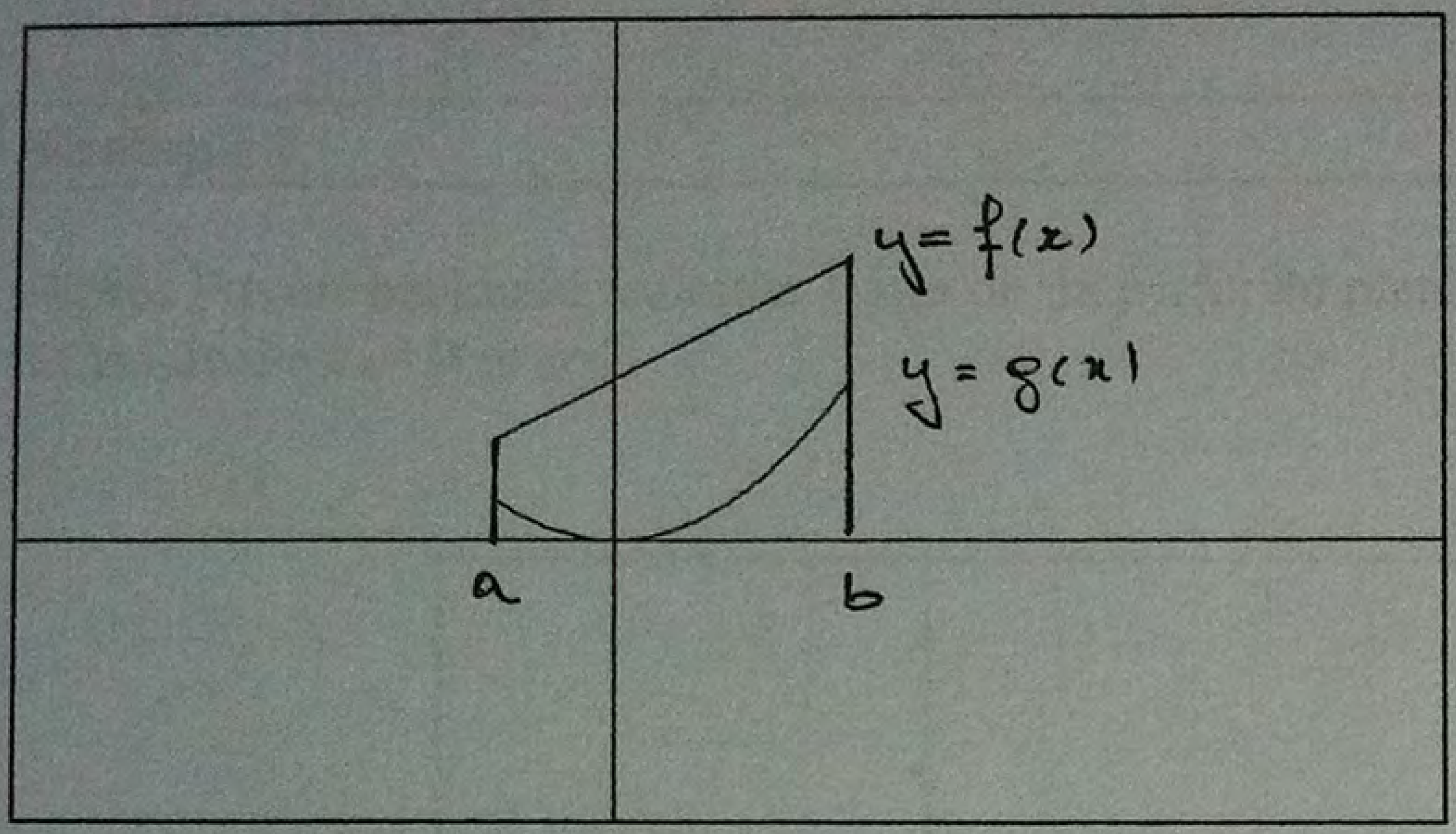

ou encore

$$\boxed{A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx}$$

**Il convient de soustraire l'expression analytique de la courbe « de dessus » par celle de « dessous ».**

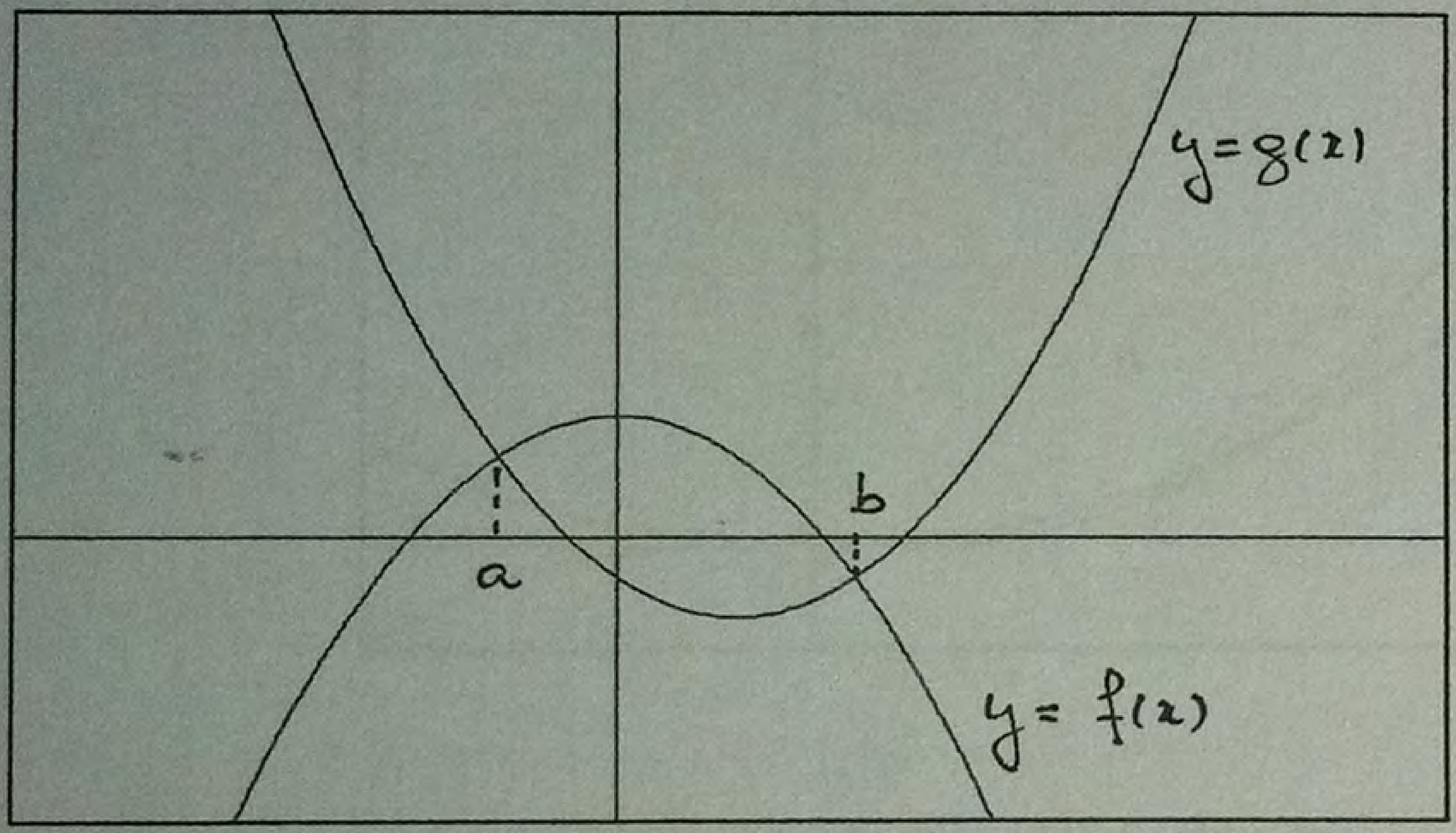
**Remarques :**

1. Cette formule reste valable lorsque A est bordée par des segments de droites.




$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

2. Cette formule reste valable lorsque les fonctions f et g sont de signe variable sur l'intervalle [ a ; b ].




$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

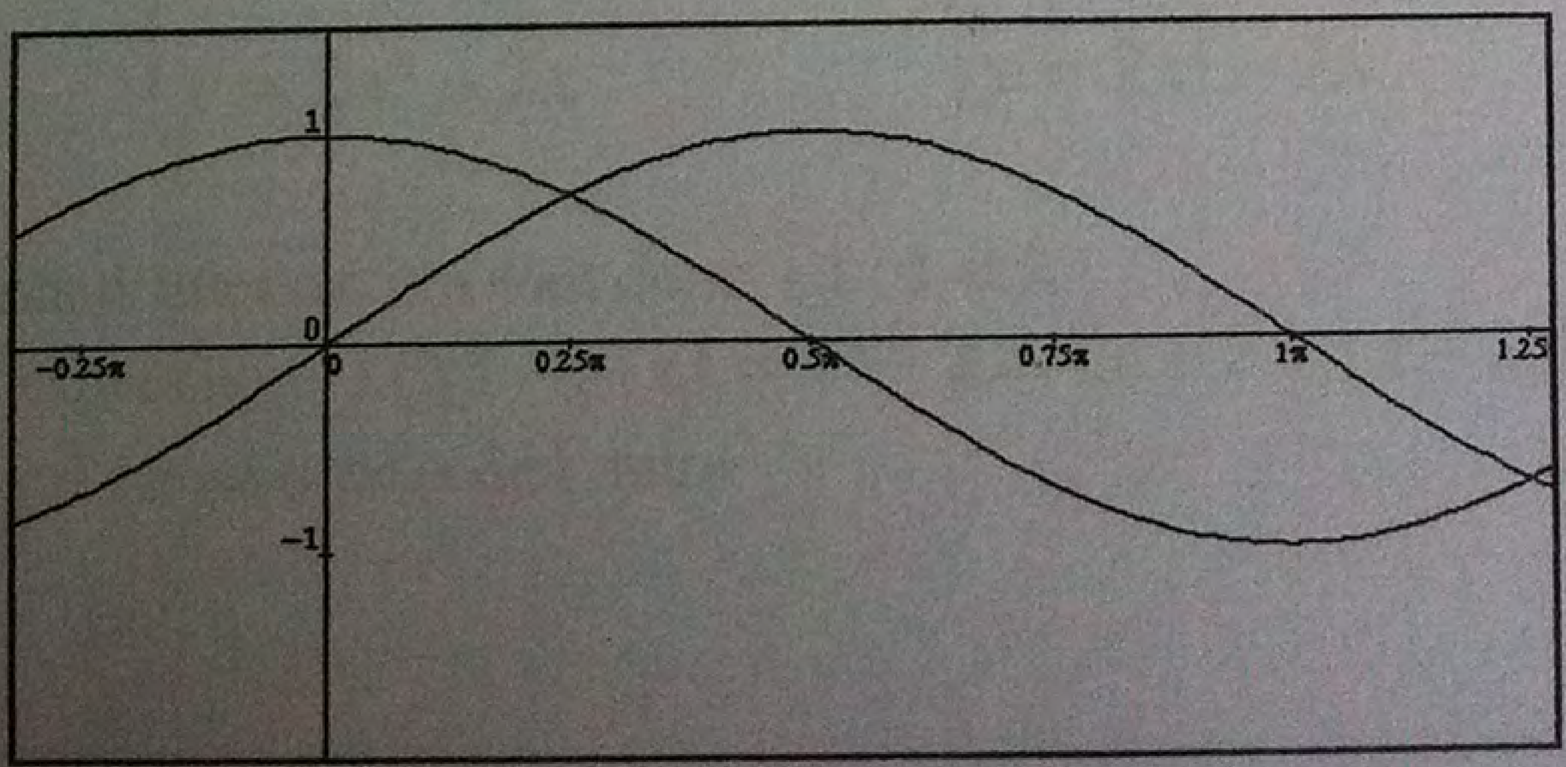
En effet, il suffit de faire agir une translation verticale qui envoie $(x : y)$ sur $(x : y + |m|)$

L'aire hachurée reste inchangée mais se trouve comprise entre les courbes d'équation $y = f(x) + |m|$ et $y = g(x) + |m|$ qui sont deux fonctions positives. Et on retrouve la formule

$$A = \int_a^b [f(x) + |m|] - [g(x)] + |m|\,]\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

**Exemple 1**

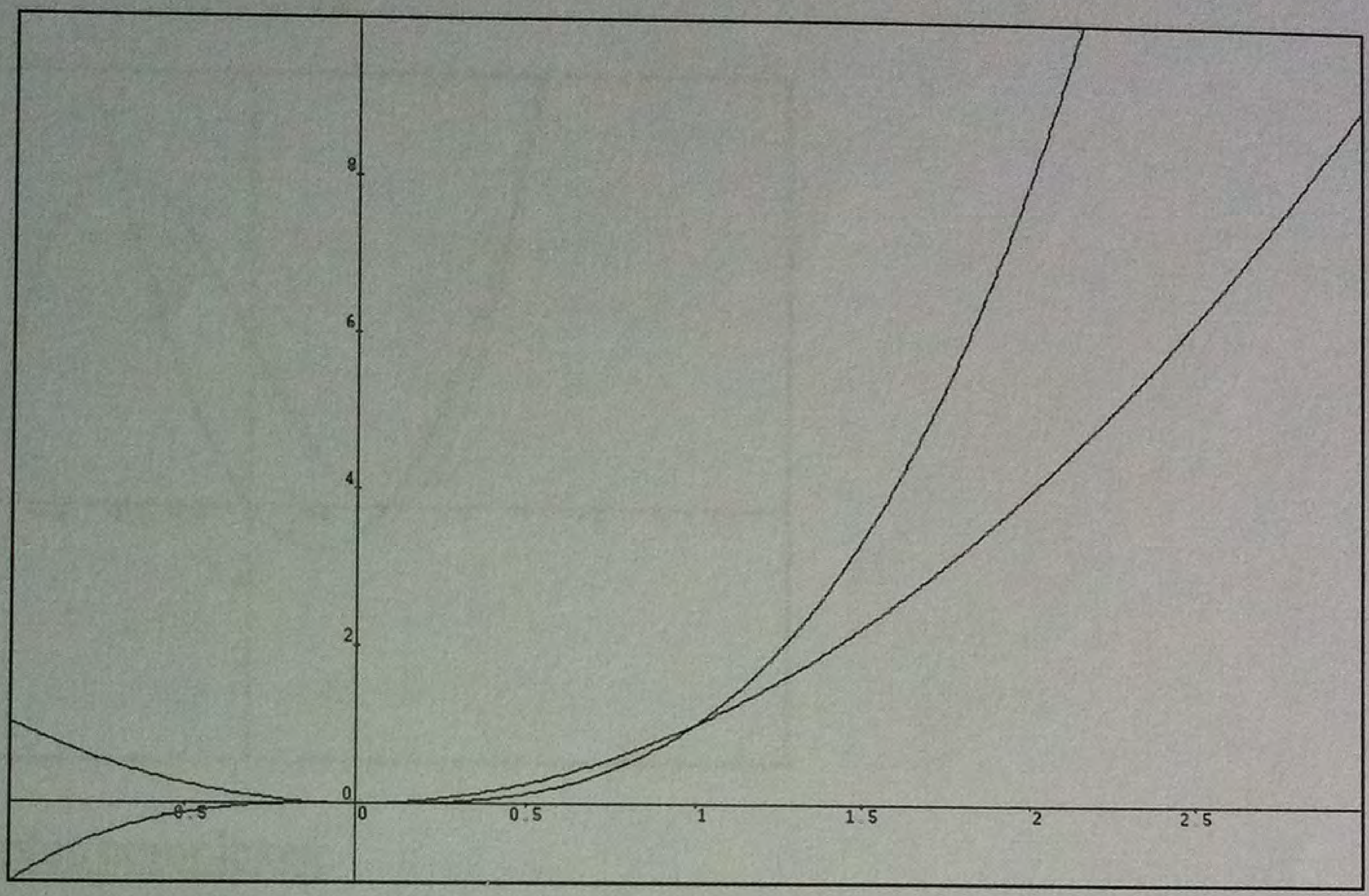
Après l'avoir hachurée, calculer l'aire de la partie du plan comprise entre f (x) = sin x ; g (x) = cos x et les droites x =π / 2 et x = π.



$$A=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx=\left[-\cos x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=(-(-1)-0)-(-0-1)=2 \text{ us}$$

**Exemple 2**

Après l'avoir hachurée, calculer l'aire de la partie du plan comprise entre les graphes de $f(x) = x^2$ et $g(x)= x^3$, et les droites $x= 0$ et $x=2$.




On remarque que sur [ 0 ; 1], $f(x) = x^2$ est au-dessus de $g(x) = x^3$ mais sur [ 1 ; 2 ] c'est le contraire!

$$A=\int_0^1(x^2-x^3)dx+\int_1^2(x^3-x^2)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1+\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right]_1^2$$

$$A==\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\left(\frac{16}{4}-\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)=-\frac{6}{3}+\frac{14}{4}=\frac{2}{3}$$

**Exemple 3**

Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre les graphes de $f(x) = x^3 - 3x + 2$ et $g(x) = 2x^2 -2x$.
Il est certain qu'un graphe facilite grandement les choses, mais ce n'est pourtant pas indispensable.
L'abscisse des points d'intersection des graphes s'obtient en résolvant le système

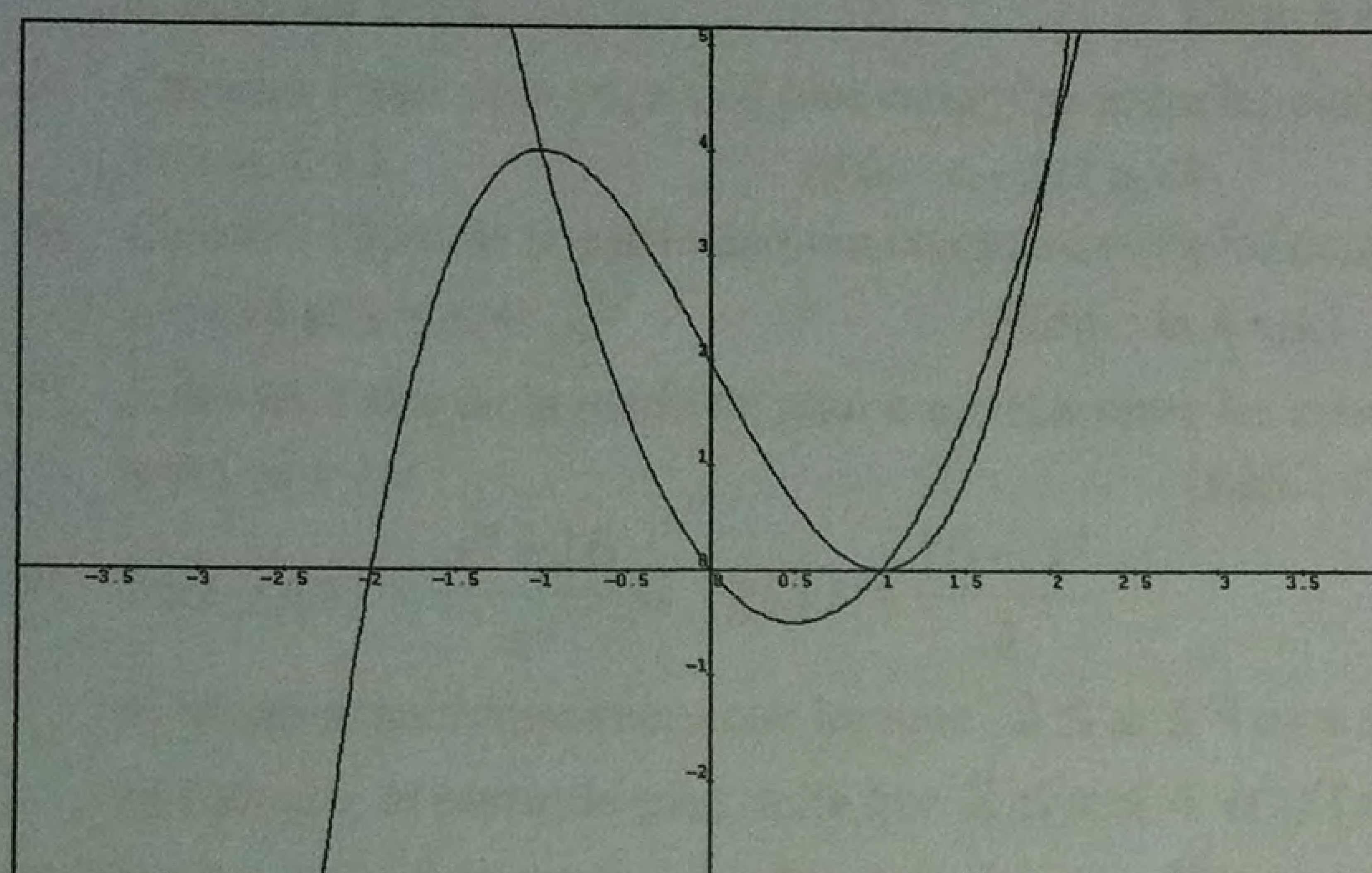
$$\begin{cases} y=x^3-3x+2 \\ y=2x^2-2x \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2-2=x^3-3x+2 \\ y=2x^2-2x \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-2)(x-1)(x+1)=0 \\ y=2x^2-2x \end{cases}$$

Lee abscisses des points d'intersection sont donc - 1 ; 1 et 2.
L étude du signe de l'expression $f(x)-g(x)=x^3-2x-x+2=(x-2)(x-1)(x+1)$ permet de déterminer la courbe qui est au dessus de l'autre.

| x |  | -1 |  | 1 |  | 2 |  |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x − 2 | - | - | - | - | - | 0 | + |
| x − 1 | - | - | - | 0 | + | + | + |
| x + 1 | - | 0 | + | + | + | + | + |
| f (x) − g (x) | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + |

$$A = \int_{-1}^{1}\left[(x^3-3x+2)-(2x^2-2x)\right]dx + \int_{1}^{2}\left[(2x^2-2x)-(x^3-3x+2)\right]dx$$

On vérifiera qu'on obtient $A = \dfrac{37}{12}$



## 1.3 Situations plus complexes

Des situations plus complexes de quadratures peuvent se rencontrer. Il faut examiner chaque situation et tenter d'obtenir l'aire cherchée en décomposant celle–ci en parties disjointes du type évoqué précédemment.

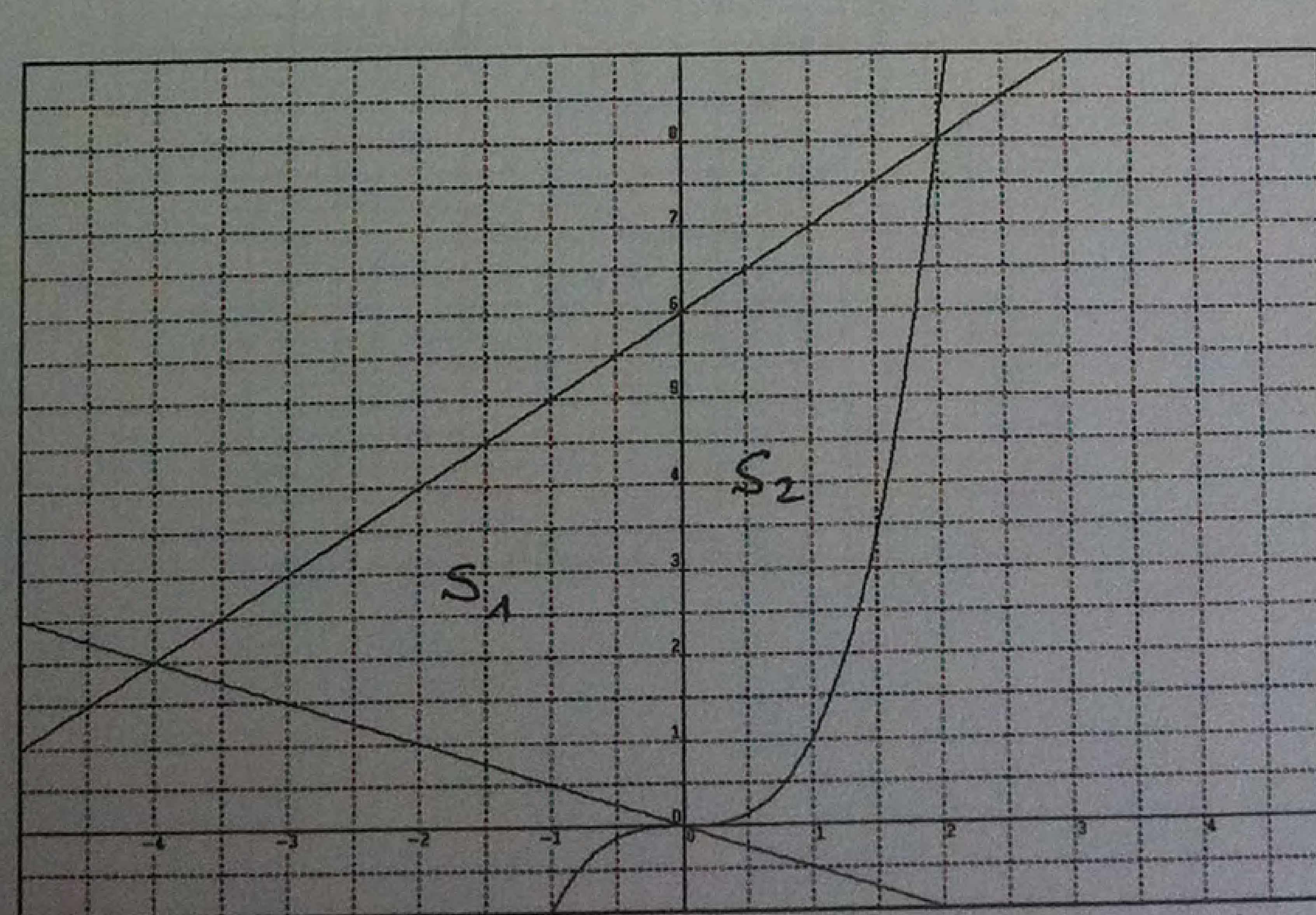
**Exemple**

Calculer l'aire de la surface délimitée par les courbes
$C_1 \equiv y = x+6$ ; $C_2 \equiv 2y + x = 0$ et $C_3 \equiv y - x^3 = 0$
Les points d'intersection apparaissent clairement sur le graphe.

$$S_1 = \int_{-4}^{0}\left[(x+6)-(-\frac{1}{2}x)\right]dx = \int_{-4}^{0}(\frac{3}{2}x+6)\,dx = \left[\frac{3}{4}x^2+6x\right]_{-4}^{0} = 12$$

$$S_2 = \int_{0}^{2}\left[(x+6)-x^3\right]dx = \int_{0}^{2}(-x^3+x+6)\,dx = \left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+6x\right]_{0}^{2} = 10$$

$A = S_1 + S_2 = 22$



**EXERCICES**

1) Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre les graphes de $f(x)=\dfrac{-1}{x-2}$ et $g(x)=\dfrac{1}{2+x}$ et les droites d'équation x = 0 et x = 1

2) Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre les graphes de f (x )= x² et g (x) = $\sqrt{x}$
(Rép. 1/3 u.s.)

3) Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre les graphes de f(x) = x² + 5 et g (x) = 4x + 5
(Rép. 32/3 u.s.)

4) Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes d'équation $y=e^{x}$ et $y=e^{-x}$ et la droite x = 1 (Rép. e + 1/e –2 u.s.)

5) Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes d'équation $y=e^{x}$ et $y=\sqrt{x}$ et les droites x=0 et x = 1 (Rép. e – 5/3 u.s.)

6) Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes d'équation $y=2tgx$ et $y=0$ et les droites x =-π/4 et x = π/4 (Rép. : ln 4 u.s.)

7) Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes d'équation $y=\sqrt{x}$ et $y=-x$ et les droites x = 1 et x = 4 (Rép. : 73/6 u.s.)

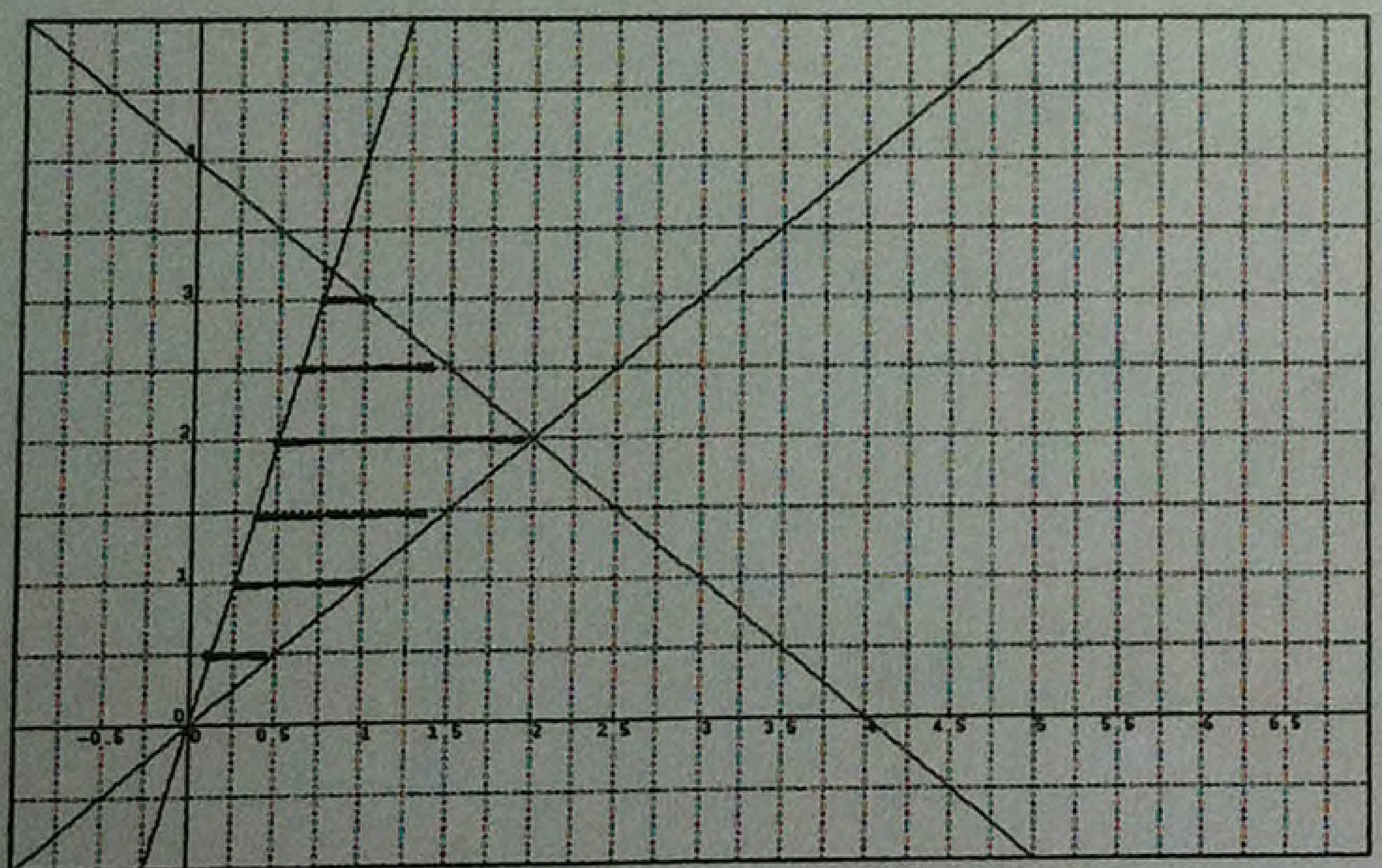
8) Soit $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2}$ et $g(x)=\dfrac{16-x^2}{4}$

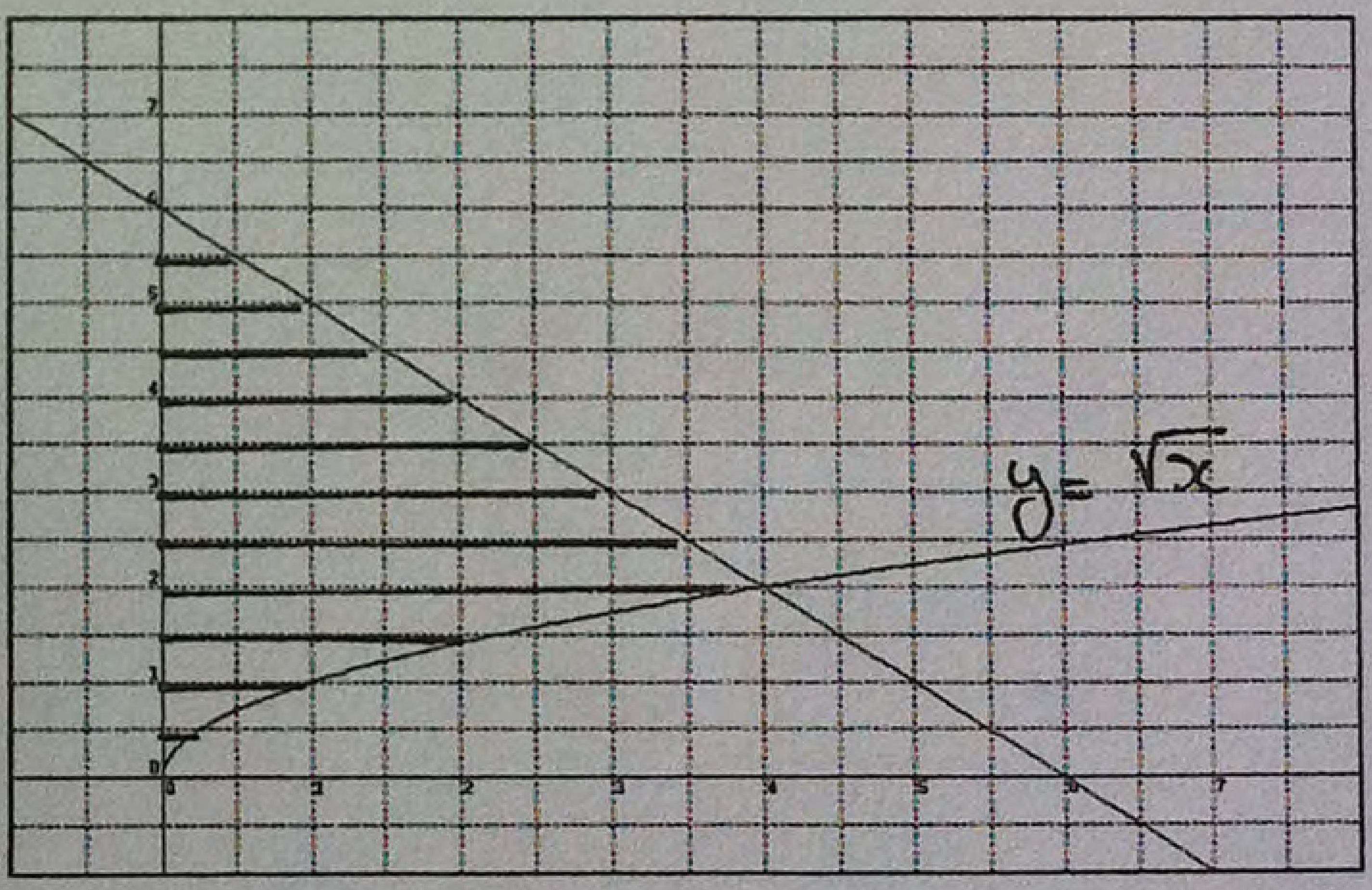
a) Montrer analytiquement que lorsque $2\leq x\leq 4$ on a que $f(x)\leq g(x)$.

b) Calculer la partie de plan telle que $2\leq x\leq 4$ et $f(x)\leq y\leq g(x)$.

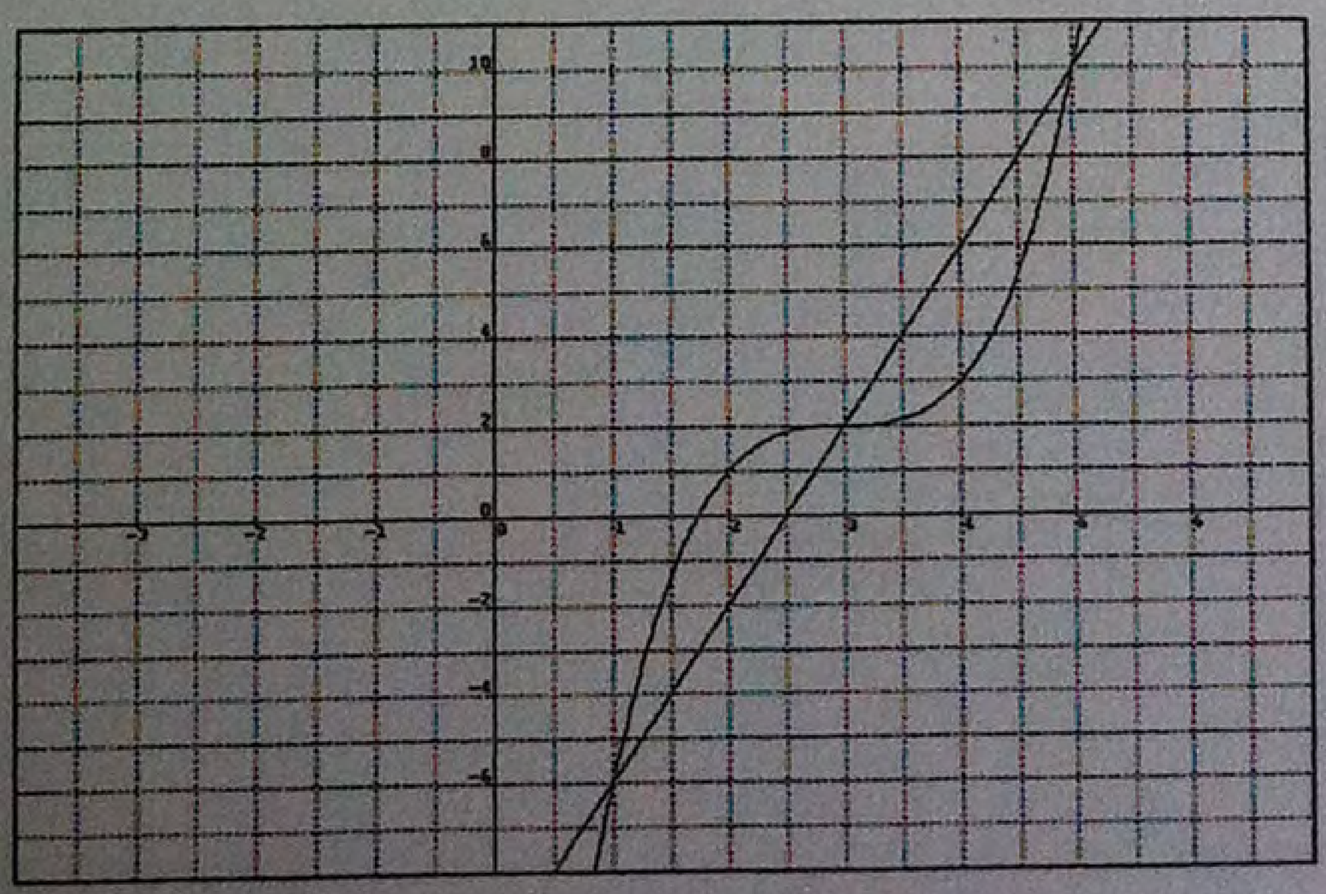
9) Calculer l'aire de la région de plan délimitée par les courbes d'équation $y=x^2-9$ ; $y+2x=6$ et $3x-y+1=0$ (Rép. 35.5 u.s )

10) Calculer les aires hachurées. (Rép. a) 2 u.s ; b) 14,04 u.s.)






11) Rechercher l'aire de la région de plan limitée par les courbes $y=(x-3)^3+2$ et $y=4x-10$

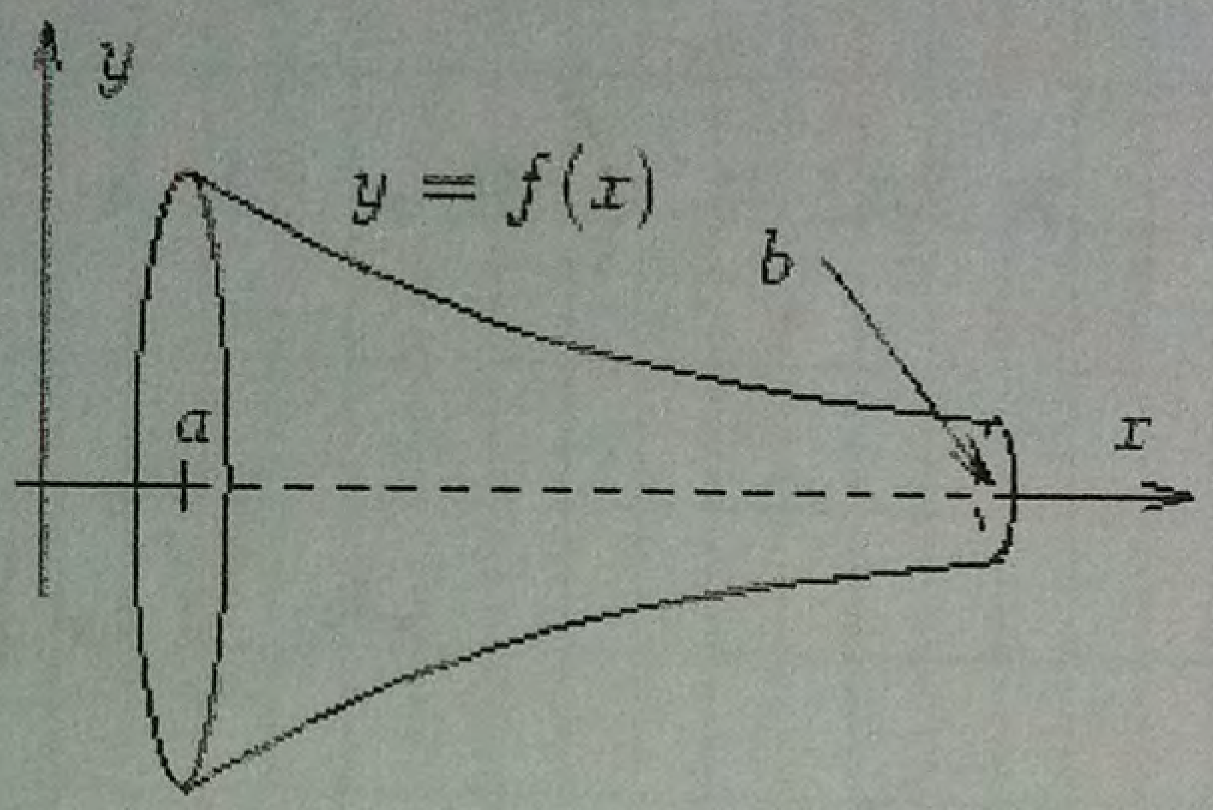


## 2. Cubatures

La cubature d'un solide est le calcul de son volume. On se limite ici aux solides de révolution, c'est à dire engendrés par la rotation autour d'un axe d'une surface plane.

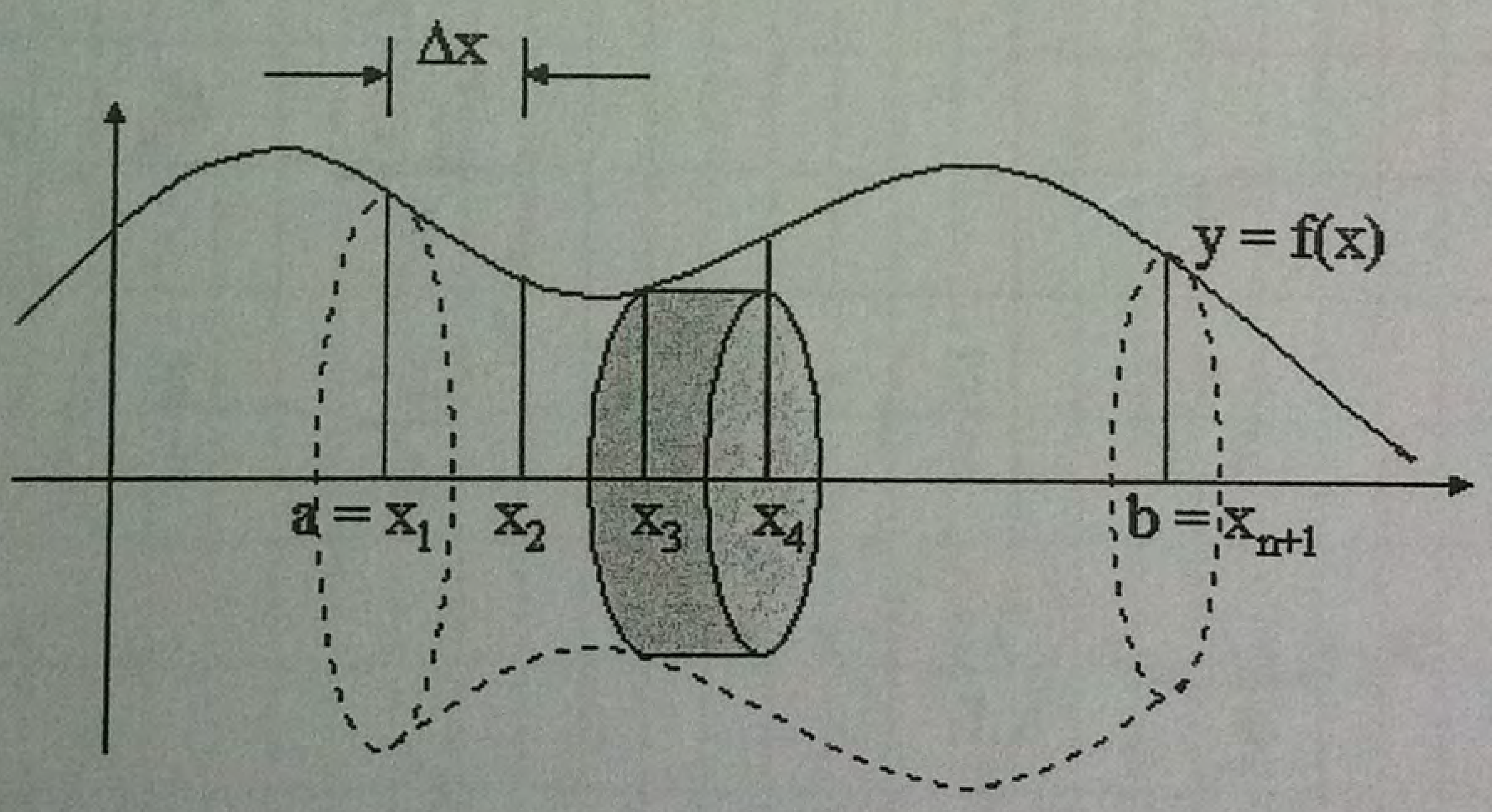
### 2.1 Volume d'un solide de révolution.

On s'intéresse au volume de l'objet engendré par la rotation autour de X de la surface plane limitée par la courbe d'équation y = f (x), les droites d'équations x = a et x = b et l'axe des X.

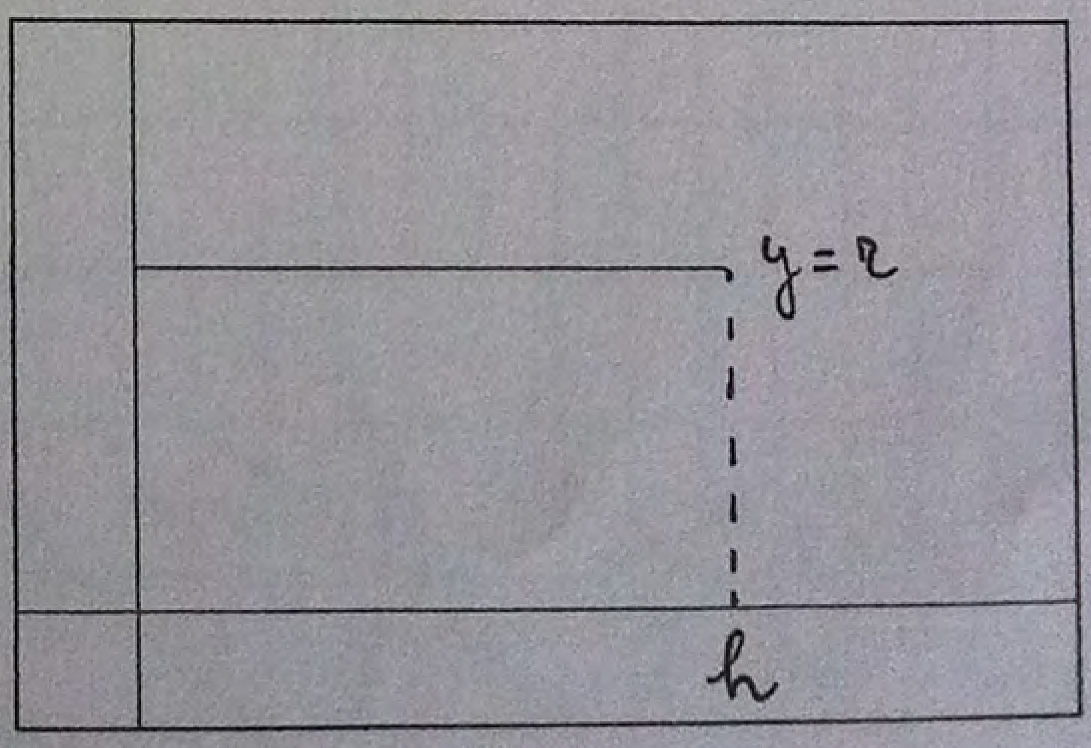



Le volume de cet objet peut être considéré comme la somme de petits cylindres dont chaque volume est $\pi . f^2(x_i) . \Delta x$ (aire de base X hauteur)
Par passage à la limite sur la somme, on obtient

$$\boxed{V = \int_a^b \pi . f^2(x).dx}$$




### 2.2 Exemples



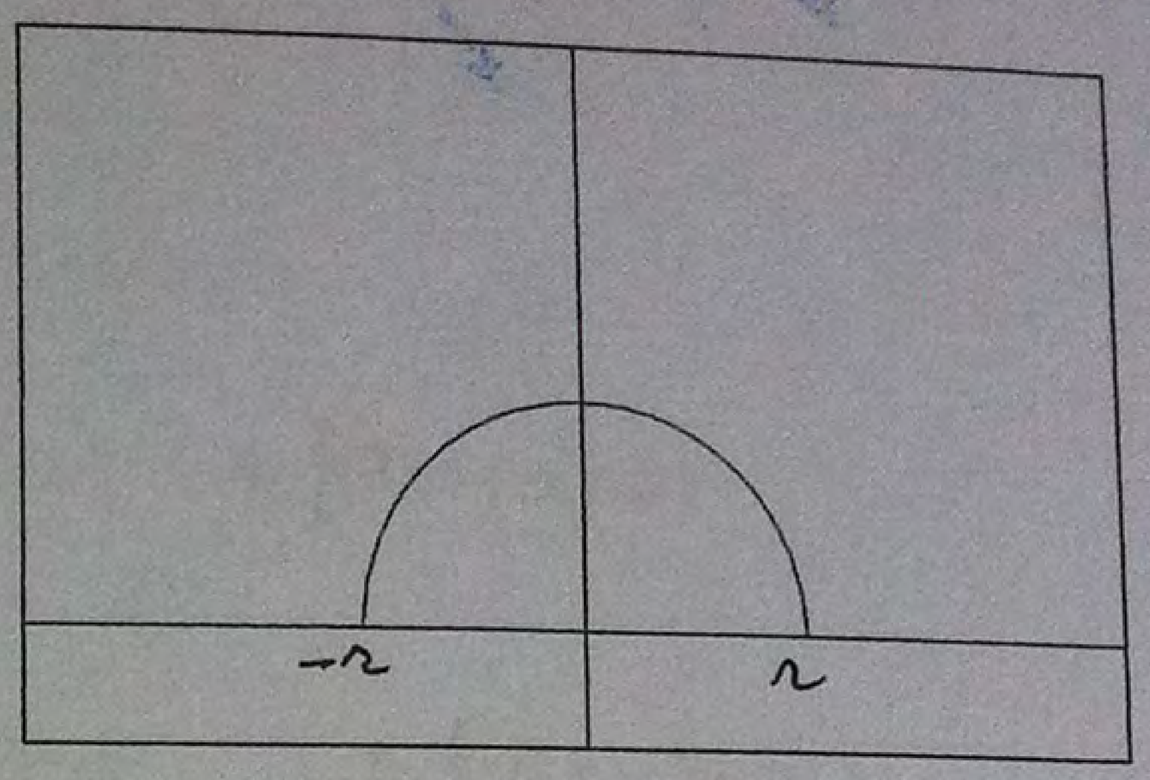

Le volume du cylindre.

Un cylindre est engendré par la rotation du rectangle de largeur r et de hauteur h autour de X.
Appliquons la formule que nous venons de donner pour le calcul du volume d'un solide de révolution.

$$V = \pi \int_0^h r^2\, dx = \pi r^2 \int_0^h dx = \pi r^2 h$$

Nous retrouvons ici la formule classique connue depuis l'école primaire!

Le volume de la sphère




La sphère est générée par la rotation autour de l'axe X du demi cercle centré en l'origine et de rayon r.
L'équation de ce demi cercle est $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$
Le volume de la sphère peut donc se calculer comme suit :

$$V = \int_{-r}^{r} \pi.(r^2 - x^2)\,dx = \pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

## EXERCICES

1. Calculer le volume du solide engendré par la rotation autour de X de la surface délimitée par $G_f$, l'axe X et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$

a) $f(x) = 2x + 3 \qquad a = 0 \qquad b = 2$

b) $f(x) = 4x \qquad a = -3 \qquad b = 2$

I Like Q

c) $f(x) = x^2 - 1 \qquad a = -\frac{1}{2} \qquad b = \frac{1}{2}$

d) $f(x) = 2\sqrt{x} \qquad a = 2 \qquad b = 4$

(rép. a) $158\pi/3$ b) $560\pi/3$ c) $203\pi/240$ d) $32\pi$ unités de volume)

2. Calculer le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe X de la surface délimitée par la courbe d'équation $y = e^x$ ,l'axe X, les droites d'équation $x = -1$ et $x = 2$

(rép. $\frac{\pi}{2}(e^4 - \frac{1}{e^2})$ unités de volume)

3. Calculer le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe X de la surface délimitée par la courbe d'équation $y = e^x$, l'axe X, les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$

(rép. $\frac{\pi}{2}(e^2 - \frac{1}{e^2})$ unités de volume)

4. Calculer le volume du solide engendré par la rotation autour de X de la surface délimitée par les courbes ou droites suivantes:

a) $y = x^2 - 4 \quad et \quad y = -1$
b) $y = x^2 - 4 \quad et \quad y = -x^2$

5. Soit $f(x) = x^2 - x \qquad et \qquad g(x) = 2x + 4$

a) Calculer $\int_0^1 f(x)dx \qquad \int_0^3 g(x)dx \qquad \int_{-4}^0 g(x)dx$

b) déterminer l'aire comprise entre $G_f$ et $G_g$

c) déterminer l'aire comprise entre $G_f$, l'axe X et les verticales $x = 0$ et $x = 1$

d) déterminer le volume du solide de révolution obtenu par la rotation de $G_g$ autour de X entre $x = 2$ et $x = 4$

**Exercices de révision**

1. Calculer les intégrales indéfinies suivantes

**Série 1**

1. $\int (x^3+5)\,dx$ 2. $\int (\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^4})\,dx$ 3. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ 4. $\int (3x^2+x)\,dx$

5. $\int \frac{1+x^2}{x^2}\,dx$ 6. $\int (-5\sqrt{x}+2x+1)\,dx$ 7. $\int (1+2x)^2\,dx$ 8. $\int x^2(x-3)\,dx$

9. $\int \frac{4-x^2}{x-2}\,dx$ 10. $\int (3+x^3-\sqrt[3]{x})\,dx$ 11. $\int (2-x)(2+x)\,dx$ 12. $\int \frac{1}{x^2}\,dx$

**Série 2**

1. $\int (3x-4)^5\,dx$ 2. $\int x^3(2-x^4)^3\,dx$ 3. $\int \frac{x^2}{(1-x^3)^2}\,dx$ 4. $\int (x^3+5)^3 3x^2\,dx$

5. $\int x(3x^2-4)\,dx$ 6. $\int \sqrt{(1-3x)^5}\,dx$ 7. $\int (3x^2-2x)^5(6x-2)\,dx$ 8. $\int \frac{2x}{(x^2-1)^2}\,dx$

9. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ 10. $\int x^2 e^{x^3}\,dx$ 11. $\int 5\cos 3x\,dx$ 12. $\int x(5x^2-2)\,dx$

**Série 3**

1. $\int (x^3-7)^6\, 5x^2\,dx$ 2. $\int 6x^2\sqrt{2x^3-1}\,dx$ 3. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ 4. $\int \ln(1-x)\,dx$

5. $\int \frac{8}{x^9}\,dx$ 6. $\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}\,dx$ 7. $\int 3\sin(x+\frac{\pi}{4})\,dx$ 8. $\int \frac{1-\sin^2 x}{\cos x}\,dx$

9. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$ 10. $\int tg\, x\,dx$ 11. $\int \sin x\cos^2 x\,dx$ 12. $\int 3x^2\sin x^3\,dx$

**Série 4**

1. $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ 2. $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$ 3. $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}\,dx$ 4. $\int \cos(1-8x)\,dx$

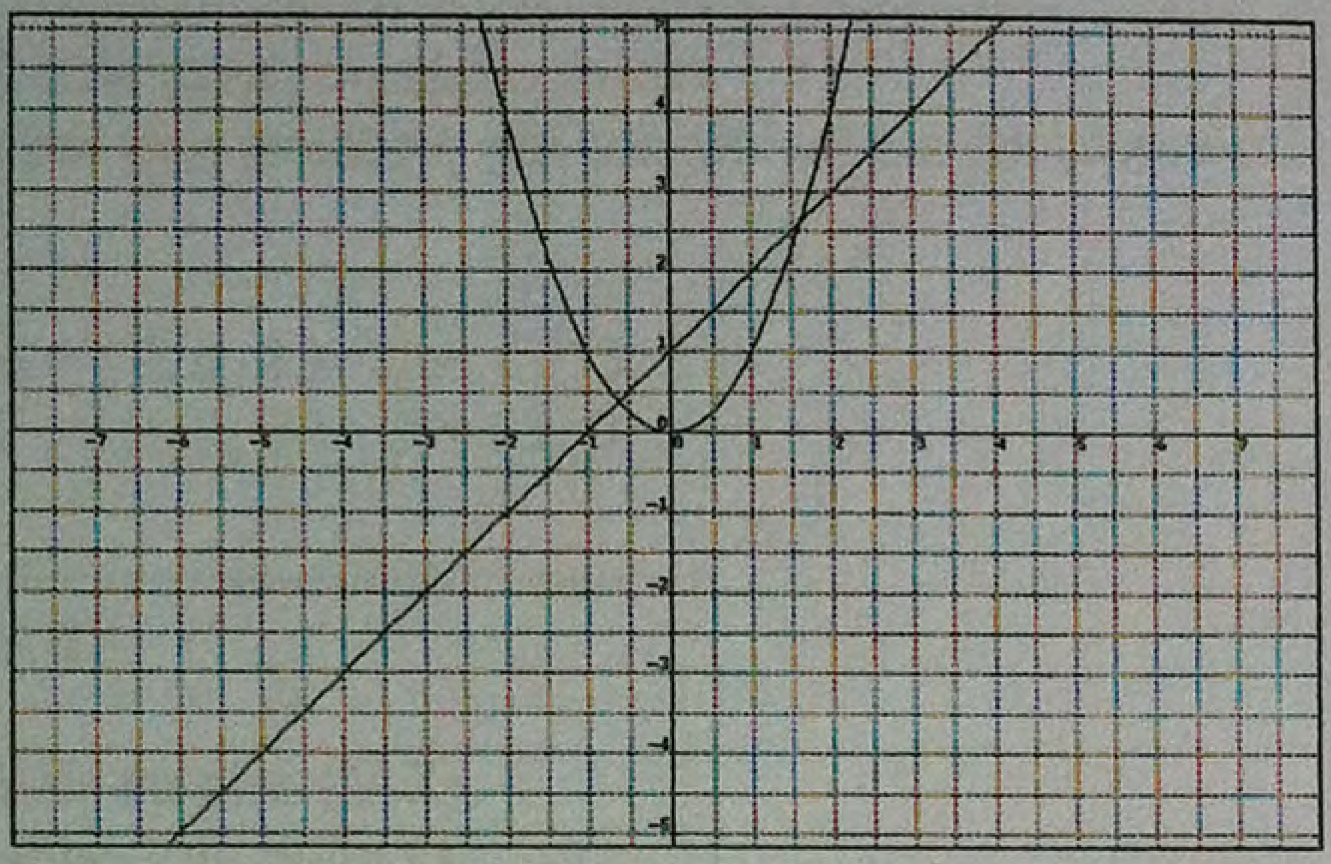
5. $\int \frac{-3x}{\cos^2 x^2}\,dx$ 6. $\int 4\sin^5 x\cos x\,dx$ 7. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ 8. $\int \frac{1+\ln^3 x}{2x}\,dx$

9. $\int \frac{e^{tg\,x}}{\cos^2 x}\,dx$ 10. $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sin x}\,dx$ 11. $\int x^2\cos x\,dx$ 12. $\int (x^2+x+1)\sin x\,dx$

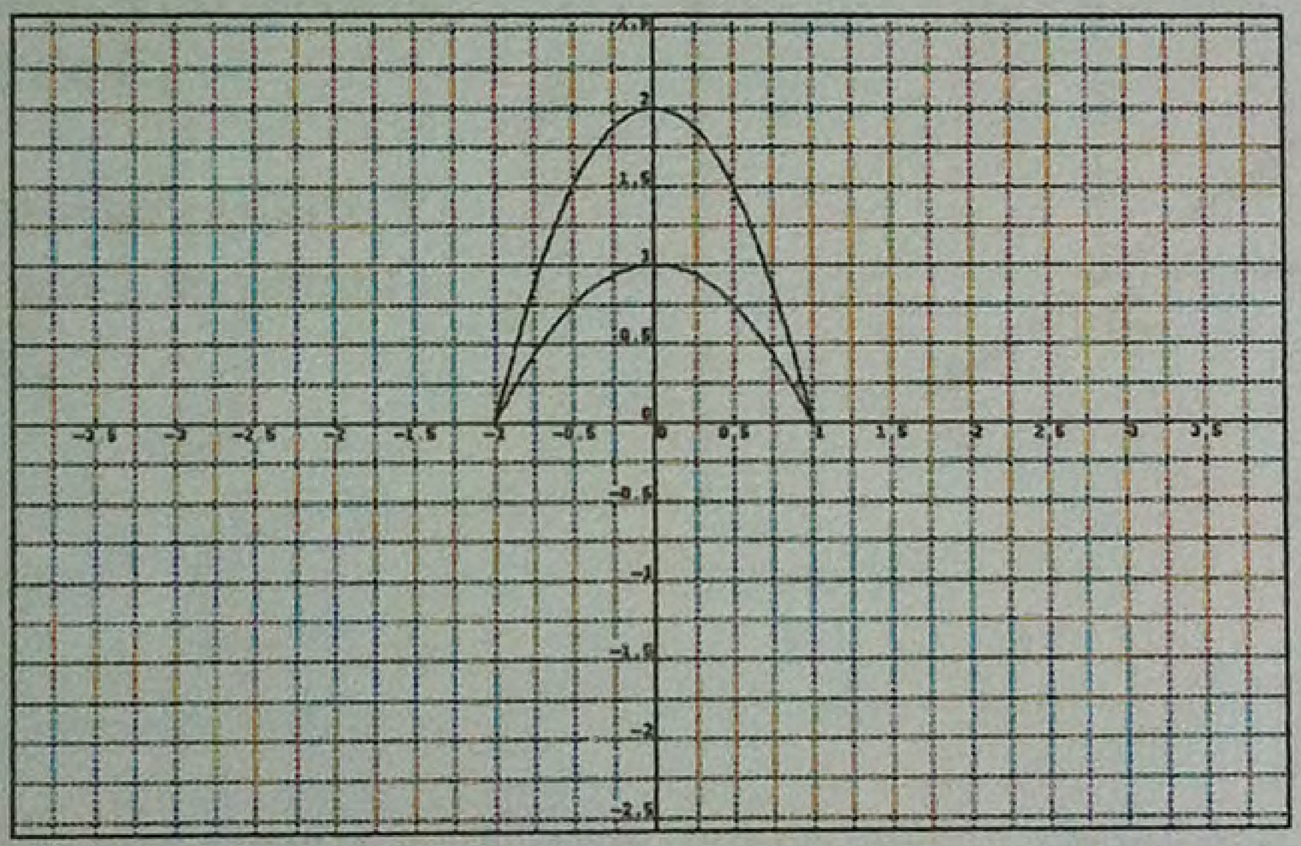
2. Calculer l'aire située entre les courbes $y = 6 - x^2$ et $y = -2x + 3$

3. Calculer l'aire de la partie de plan déterminée par $y = \frac{1}{2} + \cos x$ et les droites $x = 0$ et $x = \pi$

4. Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe X de la partie du plan limitée par les courbes $y = x^2$ et $y = x + 1$



5. Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe X de la partie du plan limitée par les courbes $y = -2x^2 + 2$ et $y = -x^2 + 1$



5. Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe X de la surface limitée par la parabole $y^2 = 4x$, l'axe x et la droite $x = 2$.

6. Calculer l'aire de la partie de plan hachurée comprise entre la parabole $y = -2x^2 + 2$ et le cercle $x^2 + y^2 = 4$