1. Vocabulaire et notations

Définition : **On appelle phénomène (ou expérience) aléatoire ou phénomène fortuit toute expérience qui a plusieurs résultats possibles, la réalisation de chacun des résultats étant due au hasard.**

L'ensemble des résultats possibles d'un tel phénomène est appelé catégorie d'épreuve et noté Ω.

Exemples :

Phénomène aléatoire	Catégorie d'épreuve correspondante
• Jet d'un dé à 6 faces	Ω = { ⚀ , ⚁ , ⚂ , ⚃ , ⚄ , ⚅ }
• Jet d'une pièce de monnaie	Ω = { F , P }
• Tirage d'une bille de lotto	Ω = { 1 , 2 , … , 42 }
• Tirage d'une carte d'un jeu normal	Ω = { As♥, 2♥, 3♥, … , Roi♥, As♠, … , Roi♠, As♣, … , Roi♣, As♦, … , Roi♦ }
• Jet de 2 pièces différentes	Ω = { FF , FP , PF , PP }

Prenons un exemple que nous allons utiliser tout au long du chapitre pour illustrer les définitions et propriétés.

Soit l'épreuve "jets successifs de deux dés discernables", par exemple un dé noir puis un dé rouge.

Chaque jet est représenté par un couple de nombres, le premier étant le résultat du dé noir et le second, le résultat du dé rouge. Ainsi par exemple, (4 , 1) et (1 , 4) sont deux résultats différents.

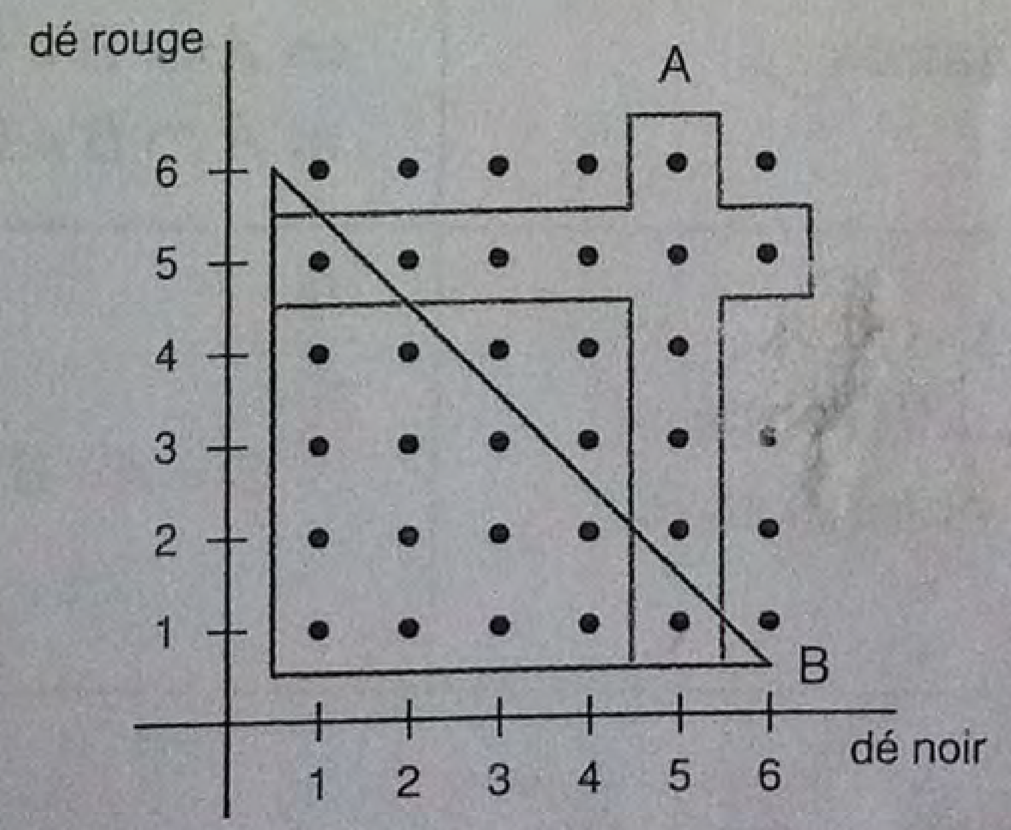
On a dès lors : Ω = { (1 , 1), (1 , 2), (1 , 3), (1 , 4), (1 , 5), (1 , 6),
(2 , 1), (2 , 2), (2 , 3), (2 , 4), (2 , 5), (2 , 6),
(3 , 1), (3 , 2), (3 , 3), (3 , 4), (3 , 5), (3 , 6),
(4 , 1), (4 , 2), (4 , 3), (4 , 4), (4 , 5), (4 , 6),
(5 , 1), (5 , 2), (5 , 3), (5 , 4), (5 , 5), (5 , 6),
(6 , 1), (6 , 2), (6 , 3), (6 , 4), (6 , 5), (6 , 6) }

Pour un phénomène aléatoire donné, l'intérêt se porte sur la réalisation d'un certain nombre de résultats précis. Cette réalisation s'appelle un **événement**.

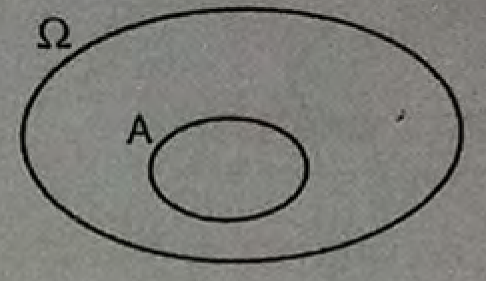
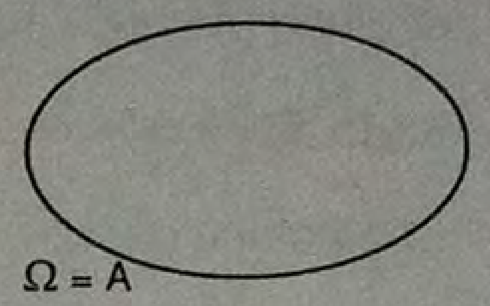
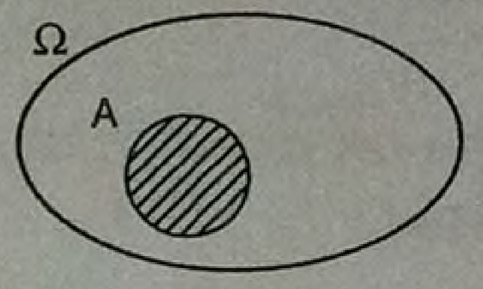
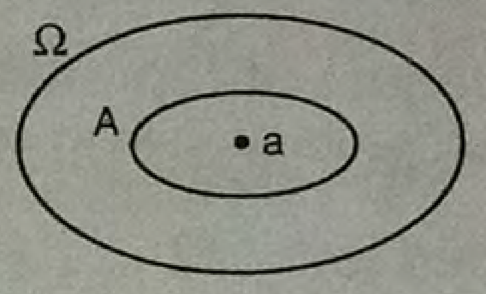
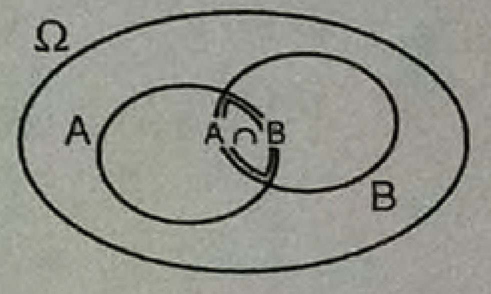
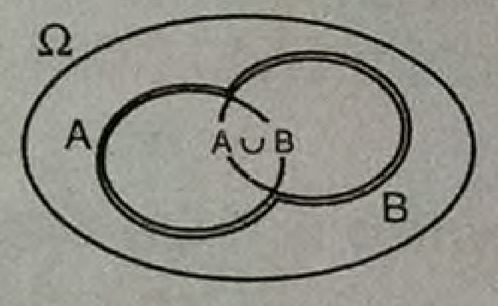
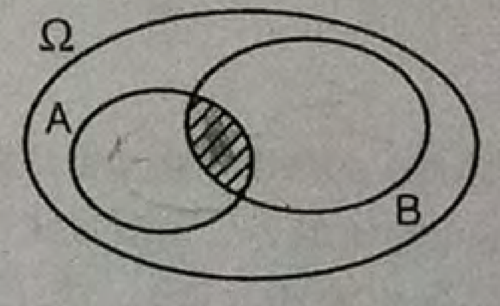
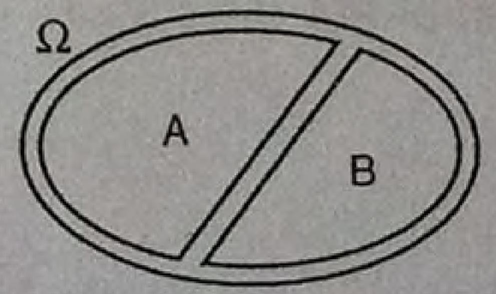
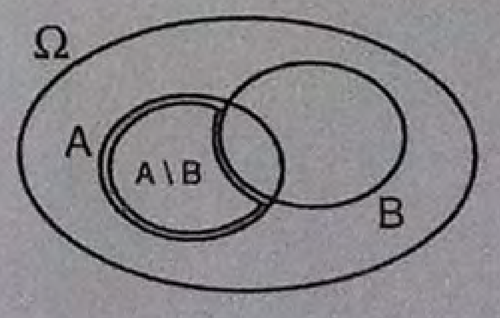
Définition : **On appelle événement d'un phénomène fortuit, tout sous-ensemble de sa catégorie d'épreuve.**

Pour notre exemple, on peut, entre autres, définir :

- l'événement A : "obtenir un 5 sur au moins un des dés",
  c'est-à-dire A = {(5 , 1), (5 , 2), (5 , 3), (5 , 4), (5 , 5), (5 , 6), (1 , 5), (2 , 5), (3 , 5), (4 , 5), (6 , 5)}
- l'événement B : "obtenir une somme de points inférieure ou égale à 6",
  c'est-à-dire B = {(1 , 1), (1 , 2), (1 , 3), (1 , 4), (1 , 5), (2 , 1), (2 , 2), (2 , 3), (2 , 4), (3 , 1), (3 , 2), (3 , 3), (4 , 1), (4 , 2), (5 , 1)}



La diversité des contextes considérés dans des problèmes de probabilités nécessite une maîtrise du vocabulaire ensembliste, car il permet de bien traduire les notions relatives aux événements des phénomènes aléatoires.

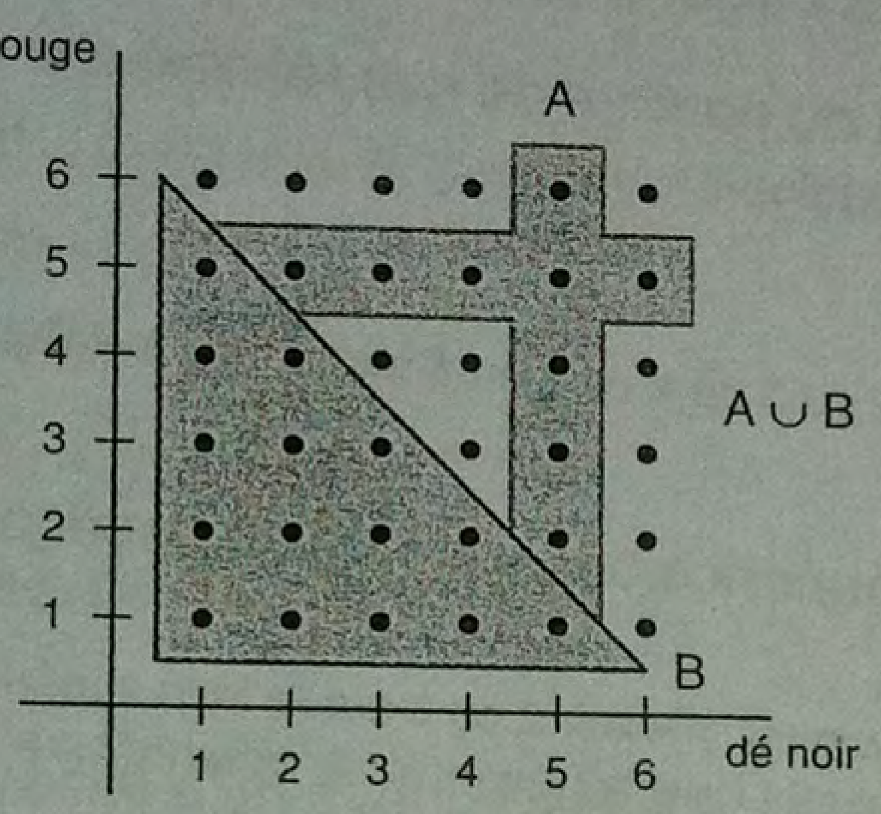
L'ensemble de **tous les résultats possibles** du phénomène aléatoire	La **catégorie d'épreuve**.	Ω	
A est un **événement** du phénomène aléatoire.	*A* est une **partie** de Ω.	$A \subset \Omega$	
L'événement *A* se réalise **toujours**.	*A* est **l'événement certain**.	$A = \Omega$	
L'événement *A* ne se réalise **jamais**.	*A* est **l'événement impossible**.	$A = \varnothing$	
Il n'y a qu'**une manière** de réaliser l'événement *A*.	*A* est **un événement élémentaire**.	$A = \{a\}$ *A* est un singleton	
L'événement *C* se réalise lorsque les événements *A* et *B* se réalisent **en même temps**.	*C* est **l'intersection** de *A* et *B*.	$C = A \cap B$	
L'événement *C* se réalise lorsque l'événement *A* **ou** l'événement *B* se réalise.	*C* est la **réunion** de *A* et *B*.	$C = A \cup B$	
Les événements *A* et *B* ne se réalisent pas en même temps.	*A* et *B* sont **incompatibles** ou **disjoints**.	$A \cap B = \varnothing$	
Les événements *A* et *B* sont contraires.	A et B sont **complémentaires**.	$A = \complement_\Omega B = \overline{B}$ [1] $B = \complement_\Omega A = \overline{A}$ $\Leftrightarrow A \cup B = \Omega$ et $A \cap B = \varnothing$	
L'événement *C* se réalise lorsque l'événement *A* se réalise **et pas** l'événement *B*.	*C* est la **différence** entre *A* et *B*.	$C = A \setminus B$	

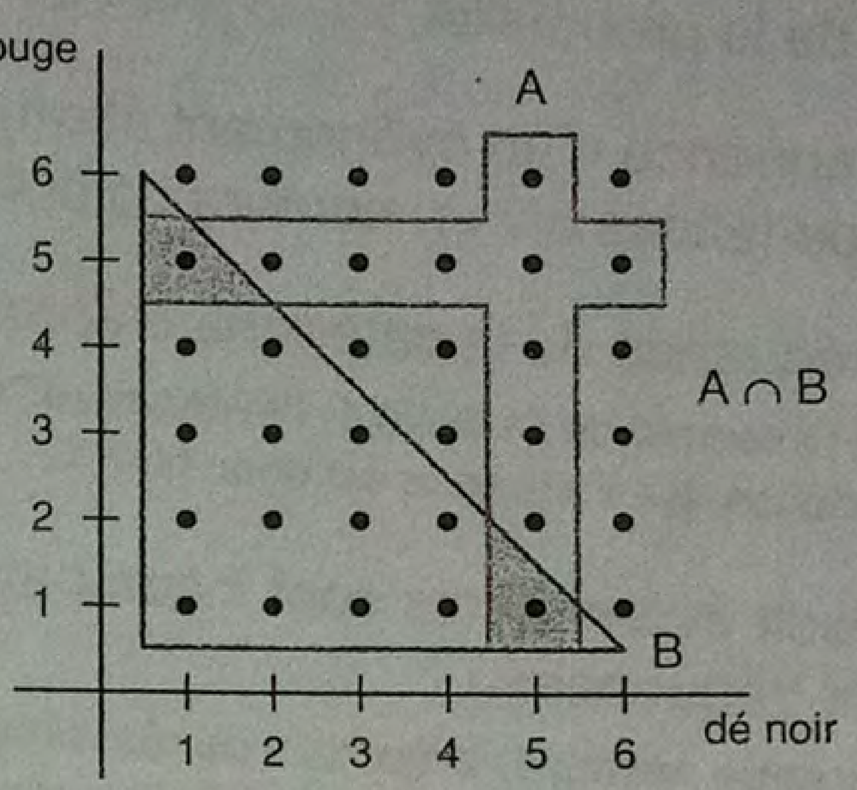
[1] Ce qui se lit "A est le complémentaire de B dans Ω".

Exemples :

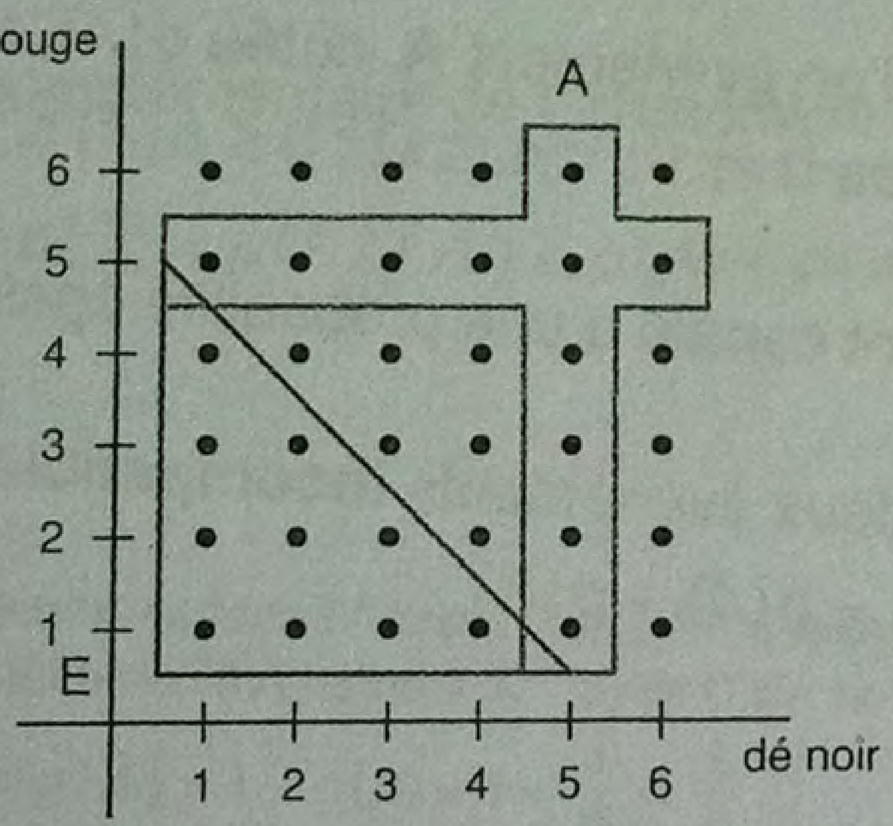
Pour le phénomène fortuit "lancer simultané de deux dés discernables",

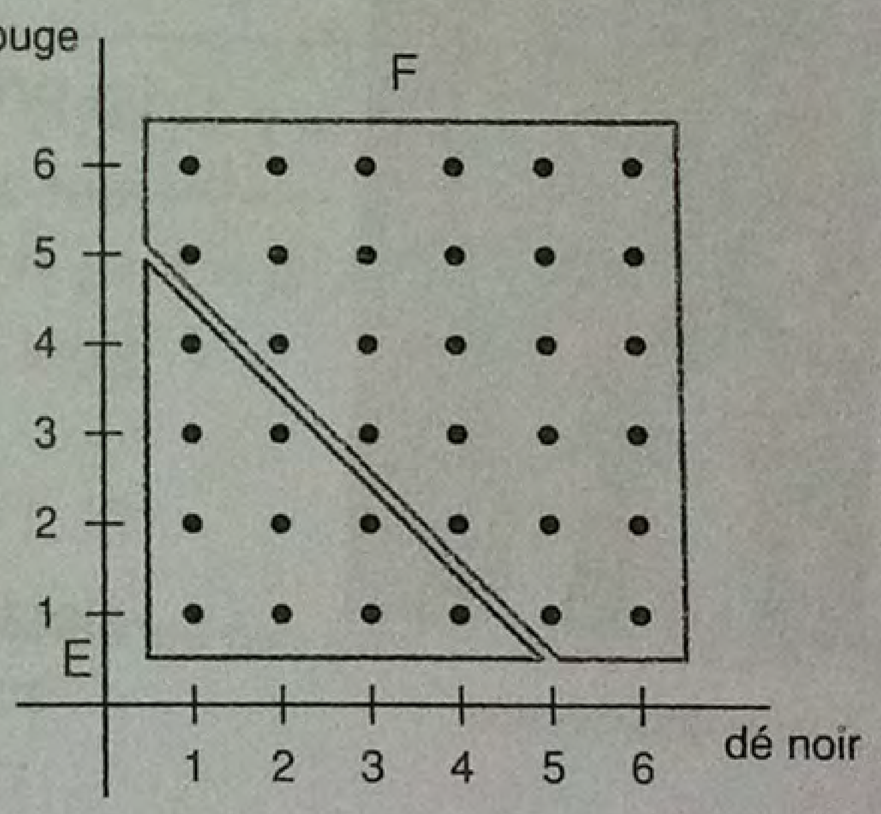
- l'événement K : "obtenir une somme de points inférieure ou égale à 12" est certain, $K = \Omega$,
- l'événement D : "obtenir une somme de points supérieure à 13" est impossible, $D = \varnothing$,
- l'événement G : "obtenir une somme de points égale à 12" est un événement élémentaire, $G = \{(6\ ,\ 6)\}$,
- l'ensemble correspondant à la réalisation de l'événement A ("obtenir au moins un 5") **ou** de l'événement B ("obtenir une somme inférieure ou égale à 6") est
  $A \cup B = \{\ (1\ ,\ 1), (1\ ,\ 2), (1\ ,\ 3), (1\ ,\ 4), (1\ ,\ 5), (2\ ,\ 1), (2\ ,\ 2), (2\ ,\ 3), (2\ ,\ 4), (3\ ,\ 1), (3\ ,\ 2), (3\ ,\ 3), (4\ ,\ 1), (4\ ,\ 2), (5\ ,\ 1),$
  $(5\ ,\ 2), (5\ ,\ 3), (5\ ,\ 4), (5\ ,\ 5), (5\ ,\ 6), (2\ ,\ 5), (3\ ,\ 5), (4\ ,\ 5), (6\ ,\ 5)\ \}$,
- l'ensemble correspondant à la réalisation simultanée de l'événement A ("obtenir au moins un 5") **et** de l'événement B ("obtenir une somme inférieure ou égale à 6") est $A \cap B = \{(1\ ,\ 5), (5\ ,\ 1)\}$,





- si E est l'événement "obtenir une somme inférieure ou égale à 5", les événements A et E sont incompatibles, $A \cap E = \varnothing$,
- le complémentaire de l'événement E est l'événement F "obtenir une somme strictement supérieure à 5" : $\complement_\Omega E = \overline{E} = F$.





Remarque : Deux événements complémentaires sont toujours incompatibles.

2. Loi de probabilité

Comme on a pu s'en rendre compte dans l'activité 1 lors d'une série d'expériences identiques, la fréquence d'apparition du 5 s'approche d'autant plus d'une certaine valeur que le nombre d'expériences augmente. Intuitivement, nous concevons que cette valeur est $\frac{1}{6}$.

Quelle que soit l'expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un événement donné finit par se stabiliser autour d'une certaine valeur lorsque le nombre d'expériences devient très grand. Cette valeur est appelée probabilité de l'événement.

Les propriétés de la fréquence déjà vues en statistique vont permettre de donner une définition axiomatique de la probabilité.

1°) La fréquence d'un événement étant le quotient du nombre de ses réalisations par le nombre total d'expériences est un nombre compris entre 0 et 1.

2°) La fréquence de la catégorie d'épreuve est 1.
Dans l'exemple de l'activité 1, l'événement "obtenir 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 6 sur la face supérieure" se réalisera à chaque expérience. Sa fréquence est donc bien 1.

3°) Si deux événements sont incompatibles, la fréquence de leur réunion est égale à la somme de leurs fréquences.
Dans notre exemple, le nombre de réalisations de l'événement "obtenir 2 ou 3 sur la face supérieure" est égal à la somme des nombres de réalisations des événements "obtenir 2 sur la face supérieure" et "obtenir 3 sur la face supérieure". Il en est donc de même de leurs fréquences.

2.1. Axiomes de Kolmogorov [1] (1933)

Andréi Kolmogorov

Soit un phénomène fortuit de catégorie d'épreuve Ω :

- La **probabilité** d'un événement A, notée $p(A)$, est un nombre réel compris entre 0 et 1 : $\forall A \subset \Omega : 0 \leq p(A) \leq 1$.
- Seul l'événement certain a une probabilité égale à 1 : $p(\Omega) = 1$.
- Si A et B sont deux événements **incompatibles** de Ω ($A \cap B = \varnothing$), alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ (loi de la somme)

Conséquences :

1) Seul l'événement impossible a une probabilité nulle : $\boxed{p(\varnothing) = 0}$
En effet : $1 = p(\Omega) = p(\Omega \cup \varnothing) = p(\Omega) + p(\varnothing) = 1 + p(\varnothing)$ donc $p(\varnothing) = 0$

2) **La somme des probabilités de tous les événements élémentaires de Ω vaut 1.**

[1] Mathématicien russe (1903-1987) qui a proposé de formaliser le calcul des probabilités dans le cadre de la théorie de la mesure.

Exemples :

1) Lorsqu'on lance un dé bien équilibré à 6 faces, la probabilité que la face supérieure soit 1 est de $\frac{1}{6}$.
Il en est de même pour toutes les autres possibilités.
En effet, puisque $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6)$
et que $p(\Omega) = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6)$
$= 6\,p(1) = 1.$
On en déduit que $p(1) = \frac{1}{6}$

2) Trois chevaux A, B et C prennent le départ d'une course. A a deux fois plus de chances de gagner que B et B deux fois plus de chances que C. Quelles sont les probabilités d'arriver en premier pour chacun sachant qu'il n'y a pas d'ex aequo ?

Les données peuvent se traduire par : $p(A) = 2\,p(B)$ et $p(B) = 2\,p(C)$,

et donc $p(A) = 4\,p(C)$.

Or $A \cup B \cup C = \Omega$ et A, B, C sont deux à deux disjoints.

$\Leftrightarrow \quad p(A) + p(B) + p(C) = 1$

$\Leftrightarrow \quad 4\,p(C) + 2\,p(C) + p(C) = 1$

$\Leftrightarrow \quad p(C) = \frac{1}{7}$

par conséquent $p(A) = \frac{4}{7}$ et $p(B) = \frac{2}{7}$.

3) La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires contenus dans A.

Exemple :

Si on lance un dé bien équilibré à 6 faces, la probabilité de lire sur la face supérieure une valeur supérieure ou égale à 5 est l'événement $\{5, 6\}$ et sa probabilité vaut $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

4) Si $\overline{A}$ est le complémentaire de l'événement A, alors $\boxed{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}$

En effet : $1 = p(\Omega) = p(A \cup \overline{A}) = p(A) + p(\overline{A})$ donc $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

Exemples :

1) Pour le phénomène fortuit "lancer d'un dé à 6 faces", l'événement B : "**ne pas** avoir 6 sur la face supérieure" est le complémentaire de l'événement A : "avoir 6 sur la face supérieure".
Donc $p(B) = p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

2) Pour le phénomène fortuit "avoir 3 enfants", où l'on suppose qu'à chaque naissance, on a autant de chance d'avoir un garçon qu'une fille, l'événement G : "avoir **au moins** un garçon" est le complémentaire de l'événement F : "n'avoir que des filles".
Donc $p(G) = p(\overline{F}) = 1 - p(F) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$
puisque la catégorie d'épreuve est $\Omega = \{fff, ffg, fgf, gff, fgg, gfg, ggf, ggg\}$.

5) $\boxed{A \subset B \Rightarrow p(A) \leq p(B)}$

En effet : $B = A \cup (B \setminus A)$ et donc $p(B) = p(A) + p(B \setminus A)$

Et puisque $p(B \setminus A) \geq 0$, on a bien $p(B) \geq p(A)$

En conséquence : $p(B \setminus A) = p(B) - p(A)$

6) En toute généralité, si A et B sont deux événements quelconques,

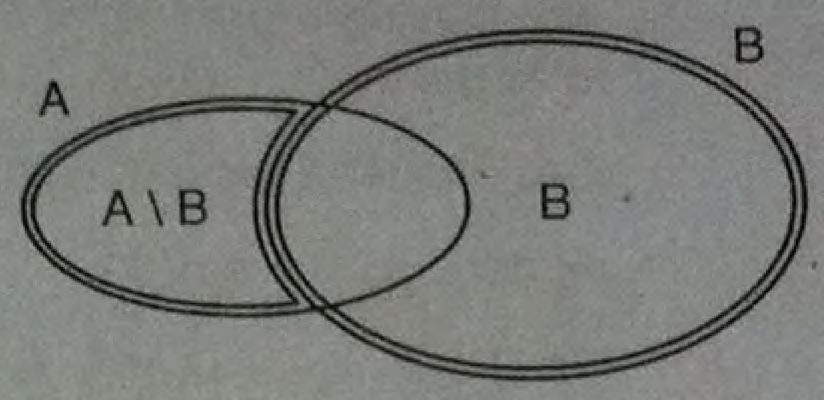
alors
$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$$

Cette relation s'appelle "relation de Boole" (du nom de l'un des pères de la théorie des probabilités). On peut la justifier intuitivement en disant que les éléments de $A \cap B$ ont été comptés deux fois : une fois dans A et une fois dans B. Il est donc normal de les décompter une fois.

On peut la démontrer simplement en remarquant que :

D'une part $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ et $(A \setminus B) \cap B = \varnothing$

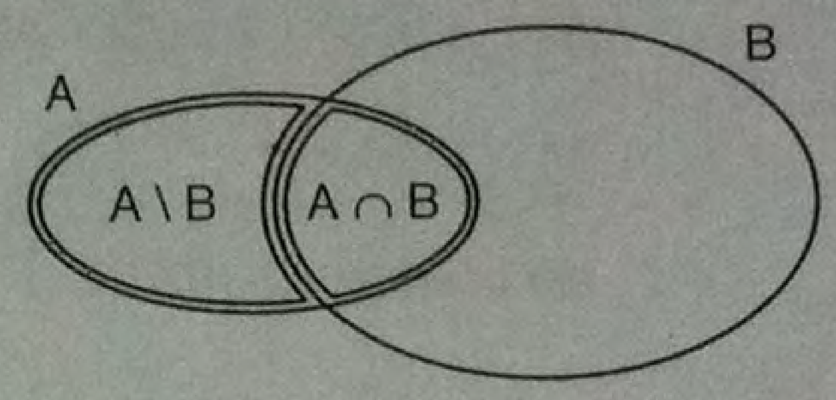
donc $p(A \cup B) = p(A \setminus B) + p(B)$



D'autre part $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ et $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \varnothing$

donc $p(A) = p(A \setminus B) + p(A \cap B)$

$\Leftrightarrow p(A \setminus B) = p(A) - p(A \cap B)$



Ainsi $p(A \cup B) = p(A \setminus B) + p(B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Exemple :

Interrogeant les 30 élèves de sa classe, un professeur se rend compte que 20 d'entre eux lisent la rubrique sportive d'un journal (événement L), 14 pratiquent un sport dans un club (événement S) et 8 font les deux. S'il choisit au hasard un élève de cette classe, la probabilité qu'il s'intéresse au sport soit par la lecture, soit par la pratique vaut

$$p(L \cup S) = p(L) + p(S) - p(L \cap S) = \frac{20}{30} + \frac{14}{30} - \frac{8}{30} = \frac{26}{30} \approx 86{,}67\ \%$$

2.2. Équiprobabilité

Lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité, c'est-à-dire la même chance de se produire, on dit qu'ils sont **équiprobables**.

Exemples :

- Lorsqu'on joue à "Pile ou Face", il y a autant de chances d'avoir "pile" que d'avoir "face".
- Lorsqu'on lance un dé bien équilibré, il y a autant de chances de lire 1, que 2, ou que n'importe quelle autre valeur (jusque 6) sur la face supérieure.

Quand les événements élémentaires sont **équiprobables**,

- si Ω comprend n éléments, la probabilité de chacun de ses événements élémentaires vaut $\frac{1}{n}$.
- la probabilité d'un événement peut se calculer par

$$\boxed{p(E) = \frac{\text{nombre de cas favorables à l'événement } E}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{\text{nombre d'éléments de } E}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\# E}{\# \Omega}\ ^{[1]}}$$

[1] Ce fut la première définition de la probabilité d'un événement; elle fut énoncée par Laplace aux environs de 1795. La notation $\#E$ se lit "cardinal E" et représente le nombre d'éléments de E.

Remarque :

Il faut être très prudent lors de l'utilisation de cette formule et vérifier l'équiprobabilité des événements élémentaires avant de l'appliquer.

Un problème célèbre illustre une mauvaise utilisation de la formule : c'est celui de D'ALEMBERT.

Un joueur lance une pièce de monnaie parfaitement symétrique.

Si le côté "pile" est au-dessus, le jeu s'arrête et le joueur a gagné.
Si le côté "face" est au-dessus, le joueur a une seconde chance; il relance la pièce et dans ce cas, si le côté "pile" est au-dessus, le joueur a gagné, sinon, il a perdu.
Le jeu s'arrête là de toute façon.

Dans l'Encyclopédie (article "Croix et Pile", 1754), le mathématicien D'ALEMBERT (1717-1783) étudia ce problème et en publia une fausse solution. Il voyait 3 cas possibles : soit le joueur gagne dès le premier lancer, soit il gagne après le second lancer, soit il perd.

Ainsi, concluait-il, il a une probabilité de gagner égale à $\frac{2}{3}$.

Il avait oublié que le gain au premier lancer n'avait pas la même chance d'apparaître que celui au second lancer !

La probabilité de gagner au premier lancer est de $\frac{1}{2}$.

La probabilité de ne pas gagner au premier lancer est donc aussi de $\frac{1}{2}$.

Ainsi au second lancer, il lui reste la moitié de cette probabilité de gagner, c'est-à-dire une probabilité égale à $\frac{1}{4}$. Donc au total, la probabilité de gain pour le joueur est de $\frac{3}{4}$.

2.3. Probabilités conditionnelles

Exemple :

Soit une population de 100 personnes composée de 30 hommes et 70 femmes.
Une enquête dans cette population nous informe qu'en fait 18 hommes et 35 femmes ont les cheveux blonds.

Si on choisit, au hasard, une personne de cette population,

- la probabilité que cette personne soit un homme blond est de $\frac{18}{100} = 18\ \%$,
- la probabilité que cette personne soit un homme est de $\frac{30}{100} = 30\ \%$.

Par contre, si on demande la probabilité que la personne soit blonde sachant que c'est un homme, la catégorie d'épreuve se réduit aux 30 hommes et donc la probabilité est de $\frac{18}{30} = 60\ \%$.

Ce type de probabilité est une **probabilité conditionnelle**. On l'écrira $p(A \mid B)$ et on lira "probabilité de A sachant que B s'est réalisé".

Définition : **Si B est un événement de probabilité non nulle, la probabilité de A sachant que B s'est réalisé est $p(A \mid B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$.**

2.4. Événements indépendants

Exemple :

En 1974, dans une ville des USA, on a réalisé un sondage où l'on demandait à chacun, homme ou femme, s'il était pour ou contre le passage de spots publicitaires au milieu des films. Les résultats suivants ont été obtenus :

	Pour	Contre	Totaux
Hommes	0, 468	0, 432	0, 9
Femmes	0, 052	0, 048	0, 1
Totaux	0, 52	0, 48	1

Si on choisit une personne au hasard, la probabilité ...

- qu'elle soit pour ce type de publicité est de $0{,}468 + 0{,}052 = 0{,}52$.
- qu'elle soit pour ce type de publicité sachant que c'est un homme est de $\dfrac{0{,}468}{0{,}468 + 0{,}432} = \dfrac{0{,}468}{0{,}9} = 0{,}52$.
- qu'elle soit pour ce type de publicité sachant que c'est une femme est de $\dfrac{0{,}052}{0{,}052 + 0{,}048} = \dfrac{0{,}052}{0{,}1} = 0{,}52$.

Le fait d'être pour le passage de ces spots publicitaires est le même quel que soit le sexe de la personne interrogée. On dira que les événements P "être pour la publicité au milieu des films" et B "être une femme" sont **indépendants**.

On remarque que $p(P \cap B) = 0{,}468 = 0{,}52 \,.\, 0{,}9 = p(P) \,.\, p(B)$.

104

Nous pouvons dire que deux événements d'un même phénomène fortuit sont indépendants lorsque la réalisation de l'un n'a aucune influence sur la réalisation de l'autre.

c'est-à-dire si $p(A \mid B) = p(A)$ et $p(B \mid A) = p(B)$.

Définition : **A et B sont indépendants $\Leftrightarrow$ $p(A \mid B) = p(A)$ et $p(B \mid A) = p(B)$.**

Propriété (Loi du produit) :

A et B sont indépendants $\Leftrightarrow$ $p(A \cap B) = p(A)\, p(B)$.

En effet : $p(A \mid B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = p(A) \Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \,.\, p(B)$.

De même $p(B \mid A) = \dfrac{p(B \cap A)}{p(A)} = p(B) \Leftrightarrow p(B \cap A) = p(B) \,.\, p(A)$.

Des événements qui ne sont pas indépendants sont dits **dépendants**.

Exemple :

Dans une urne, il y a 6 boules blanches et 4 boules noires.

1°) On tire une boule. Quelle est la probabilité de :

X : "tirer une boule blanche" ? $p(X) = \dfrac{6}{10} = 0{,}6$

Y : "tirer une boule noire" ? $p(Y) = \dfrac{4}{10} = 0{,}4$

2°) On tire deux boules successivement

avec remise de la première avant le tirage de la deuxième.
$\#\Omega = 10 \times 10 = 100$

sans remise de la première avant le tirage de la deuxième.
$\#\Omega = 10 \times 9 = 90$

Calculer la probabilité des événements suivants :

A : "tirer deux boules blanches"

$\# A = 6 \times 6 = 36$

$p(A) = \dfrac{36}{100} = 0{,}36 = p(X)\,.\,p(X)$

Les événements "tirer une première boule blanche" et "tirer une deuxième boule blanche" sont **indépendants**.

$\# A = 6 \times 5 = 30$

$p(A) = \dfrac{30}{90} = 0{,}33 \neq p(X)\,.\,p(X)$

Les événements "tirer une première boule blanche" et "tirer une deuxième boule blanche" sont **dépendants**.

B : "tirer deux boules noires"

$\# B = 4 \times 4 = 16$

$p(B) = \dfrac{16}{100} = 0{,}16 = p(X)\,.\,p(X)$

Les événements "tirer une première boule noire" et "tirer une deuxième boule noire" sont **indépendants**.

$\# B = 4 \times 3 = 12$

$p(B) = \dfrac{12}{90} = 0{,}13 \neq p(Y)\,.\,p(Y)$

Les événements "tirer une première boule noire" et "tirer une deuxième boule noire" sont **dépendants**.

C : "tirer deux boules de couleurs différentes"

$\# C = 6 \times 4 = 24$

$p(C) = \dfrac{24}{100} = 0{,}24 = p(X)\,.\,p(Y)$

Les événements "tirer une première boule blanche" et "tirer une deuxième boule noire" sont **indépendants**.

$p(C) = \dfrac{24}{90} = 0{,}27 \neq p(X)\,.\,p(Y)$

Les événements "tirer une première boule blanche" et "tirer une deuxième boule noire" sont **dépendants**.

3. Calcul de probabilités

Pour calculer la probabilité d'un événement, il faut, avant tout, analyser la situation et organiser les données afin d'utiliser la technique de calcul la plus appropriée.

Les diverses situations que nous allons examiner vont nous permettre de saisir la démarche probabiliste sans nous attarder sur les difficultés théoriques (et il y en a !) ni être exhaustifs.

Remarque : la probabilité peut s'écrire sous forme de fraction, de décimal ou de pourcentage.

On peut calculer la probabilité d'un événement :

3.1. en utilisant directement les propriétés des lois de probabilité

Cette technique sera utilisée lorsqu'on connaît la probabilité de certains événements ou des renseignements sur celle-ci. On doit alors en déduire les résultats demandés.

Exemples :

1000 appareils

Défauts   Sans défauts

A 100   B 300

C 30

1) Un appareil fabriqué en très grande série peut être défectueux à cause de 2 défauts seulement désignés par *A* et *B*. Dans un lot de 1000 appareils, on a constaté que 100 appareils présentaient au moins le défaut *A* (événement *A*), que 80 appareils présentaient au moins le défaut *B* (événement *B*) et que 30 appareils présentaient les deux défauts simultanément. Un client achète un des appareils au hasard. Calculer la probabilité que cet appareil ...

   a) présente au moins un défaut ?

   b) ne présente aucun défaut ?

   c) présente le défaut *A* seulement ?

   a) L'événement "l'appareil présente au moins un défaut" est $A \cup B$. En utilisant la relation de Boole, on a :

   $$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}1 + 0{,}08 - 0{,}03 = 0{,}15.$$

   Il y a donc 15 % des appareils qui présentent au moins un défaut.

   b) L'événement "l'appareil ne présente aucun défaut" est le complémentaire de celui que nous venons de calculer, donc $p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$.

   On en conclut qu'il y a 85 % des appareils qui n'ont aucun de ces défauts.

c) L'événement "l'appareil présente seulement le défaut A" est $A \setminus B$ et donc, si nous décomposons A en deux parties disjointes $A \setminus B$ et $A \cap B$, on a :

$$p(A) = p(A \setminus B) + p(A \cap B) \Leftrightarrow p(A \setminus B) = p(A) - p(A \cap B).$$

Donc $p(A \setminus B) = 0{,}1 - 0{,}03 = 0{,}07$.

Ce qui nous permet de dire que 7 % des appareils ne présentent que le défaut A.

2) Trois étudiants André, Bernard et Charles participent à une course à pied.
André et Bernard ont la même probabilité de gagner et, comme ils sont mieux entraînés, celle-ci est double de celle de voir Charles gagner.
Il n'y a qu'un seul gagnant à cette course.
Quelle est la probabilité que ce soit Bernard ou Charles qui gagne ?

Désignons par A (resp. B et C) l'événement "l'étudiant André (resp. Bernard et Charles) gagne la course.
Puisque André, Bernard et Charles sont les seuls participants, on sait que $p(A) + p(B) + p(C) = 1$.
Or, d'après l'énoncé, $p(A) = p(B) = 2\,p(C)$ et $A \cap B = B \cap C = C \cap A = \varnothing$.

Donc $2\,p(C) + 2\,p(C) + p(C) = 1 \Leftrightarrow p(C) = \frac{1}{5}$.

Puisque l'événement "Bernard ou Charles gagne" est $(B \cup C)$, $p(B \cup C) = p(B) + p(C) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$.

3) Au jeu de fléchettes, Adrien est plus habile que Bertrand. Sa probabilité d'atteindre la cible est $\frac{1}{2}$, tandis que celle de Bertrand n'est que de $\frac{1}{3}$.

Chacun joue une fois. Quelle est la probabilité qu'ils atteignent tous les deux la cible ?

A : "Adrien atteint la cible" $\quad p(A) = \frac{1}{2}$

B : "Bertrand atteint la cible" $\quad p(B) = \frac{1}{3}$

L'habileté de l'un n'influençant pas celle de l'autre, les événements A et B sont indépendants.

On a donc :

probabilité que Adrien et Bertrand atteignent la cible $= p(A \cap B) = p(A) \,.\, p(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ (loi du produit)

3.2. par dénombrement (comptage)

Cette technique sera utilisée lorsque les événements élémentaires sont équiprobables et qu'on pourrait écrire *in extenso* la catégorie d'épreuve Ω et l'événement E, c'est-à-dire quand Ω et E contiennent un nombre fini d'éléments que l'on peut compter.

Dans ce cas, la probabilité de l'événement se calcule par :

$$p(E) = \frac{\text{nombre d'éléments de } E}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\# E}{\# \Omega}$$

Exemples :

1) Soit le phénomène fortuit "lancer d'un dé non truqué" et l'événement A : "obtenir 6 ou 1 sur la face supérieure".

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $A = \{1, 6\}$. Dans ce cas : $p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

2) Soit le phénomène fortuit "tirer une carte au hasard d'un jeu de 52 cartes" et l'événement B : "la carte tirée est une image".

Ici, on a $p(B) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$.

3) Un jeu de dominos est constitué de plaquettes dont une face est partagée en deux parties sur lesquelles sont marqués de 0 à 6 points. Les points marqués sur les deux parties sont semblables ou non mais les plaquettes sont toutes différentes.
Si on prend au hasard un domino, quelle est la probabilité des événements suivants :
- A "tirer un domino ayant les mêmes points sur les deux parties" ?
- B "tirer un domino ayant sur les deux parties des points différents et impairs" ?

Comptons le nombre de dominos : $\Omega = \{(0, 0), (0, 1), \ldots, (0, 6), (1, 1), (1, 2), \ldots, (1, 6), (2, 2), \ldots, (6, 5), (6, 6)\} \Rightarrow \# \Omega = 28$.

Il y a 7 "doubles"; donc $p(A) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$.

Les dominos (1, 3), (1, 5), (3, 5) sont les seuls à avoir des points impairs et différents sur les deux parties,

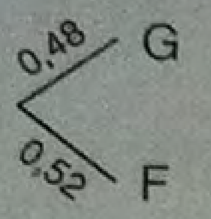
donc $p(B) = \frac{3}{28}$.

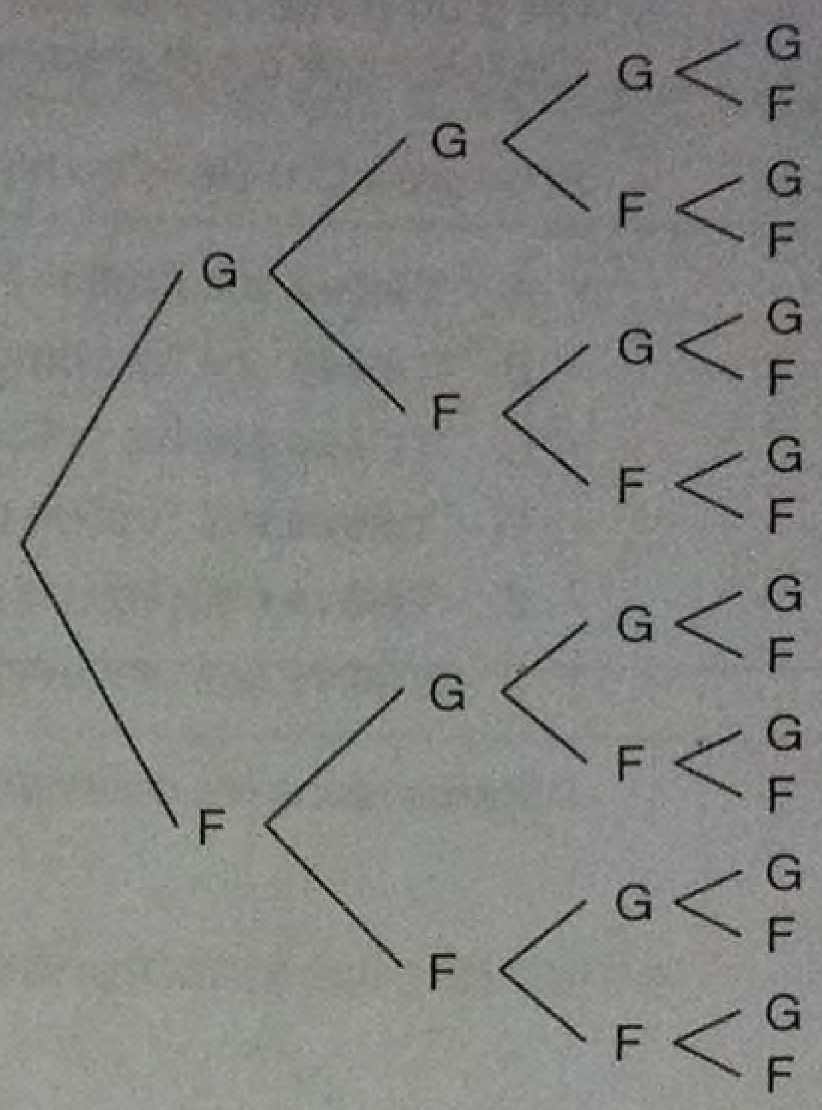
3.3. en disposant les données en arbre

Cette technique sera utilisée le plus souvent lorsque l'événement se produit en phases successives et qu'à chaque phase, on a un petit nombre de possibilités.

Exemple :

Si, à chaque naissance, la probabilité que le bébé soit un garçon est de 0,48 (et donc de 0,52 pour une fille), quelle composition de famille de 4 enfants sera la plus probable ?





La probabilité d'avoir 1 garçon est de 48 %; la probabilité d'avoir encore un garçon à la deuxième naissance est de 48 % parmi les 48 % de garçons, c'est-à-dire $\frac{48}{100} \cdot \frac{48}{100} = 23{,}04\ \%$.

Et ainsi de suite…

Donc, la probabilité d'avoir 4 garçons est de $(0{,}48)^4$, c'est-à-dire environ 5,31 %.

Par le même raisonnement,

$$p(GGGF) = (0{,}48)^3 \cdot 0{,}52 \approx 5{,}75\ \%$$
$$p(GGFG) = 0{,}48 \cdot 0{,}48 \cdot 0{,}52 \cdot 0{,}48 = (0{,}48)^3 \cdot 0{,}52 \approx 5{,}75\ \%$$
$$p(GGFF) = (0{,}48)^2 \cdot (0{,}52)^2 \approx 6{,}23\ \%$$
…

Or, les familles de deux garçons et deux filles sont composées comme suit : *FFGG, GGFF, FGFG, GFGF, FGGF, GFFG* (elles se lisent sur l'arbre). Donc, la probabilité d'avoir une famille de ce type est de $6 \cdot (0{,}48)^2 \cdot (0{,}52)^2 \approx 37{,}38\ \%$.

Finalement, le type de famille le plus probable est bien celui-là puisque

$$p(3G\,,1F) = 23\ \%,\ p(1G\,,3F) = 27\ \%,\ p(4G) = 5,31\ \% \text{ et } p(4F) = 7,31\ \%.$$

3.4. en disposant les données dans des tableaux ou des ensembles

On utilisera la technique des tableaux lorsque les objets dont on parle ont 2 caractéristiques différentes dont il faut tenir compte en même temps.

4 **Exemple :**

Les observations effectuées au Zwin ont permis de constater que la proportion des oiseaux migrateurs à une période déterminée y était de 0,5; celle des oiseaux aquatiques de 0,33 et celle des oiseaux aquatiques sédentaires de 0,20.

Quelle est la probabilité qu'un oiseau pris au hasard …

a) soit sédentaire (événement A) ?

b) ne soit ni migrateur, ni aquatique (événement B) ?

Représentons les données sous forme de tableau (les données sont en bleu, les valeurs déduites sont en rouge) :

	Migrateurs	Sédentaires	Total
Aquatiques	13 %	20 %	33 %
Non Aquatiques	37 %	30 %	67 %
Total	50 %	50 %	100 %

Après avoir complété ce tableau, les réponses aux questions se lisent directement :

$$p(A) = 50\ \% \quad \text{et} \quad p(B) = 30\ \%.$$

On utilisera la disposition dans des ensembles lorsque les objets dont on parle ont plusieurs (2 et surtout plus) caractéristiques différentes dont il faut tenir compte en même temps.

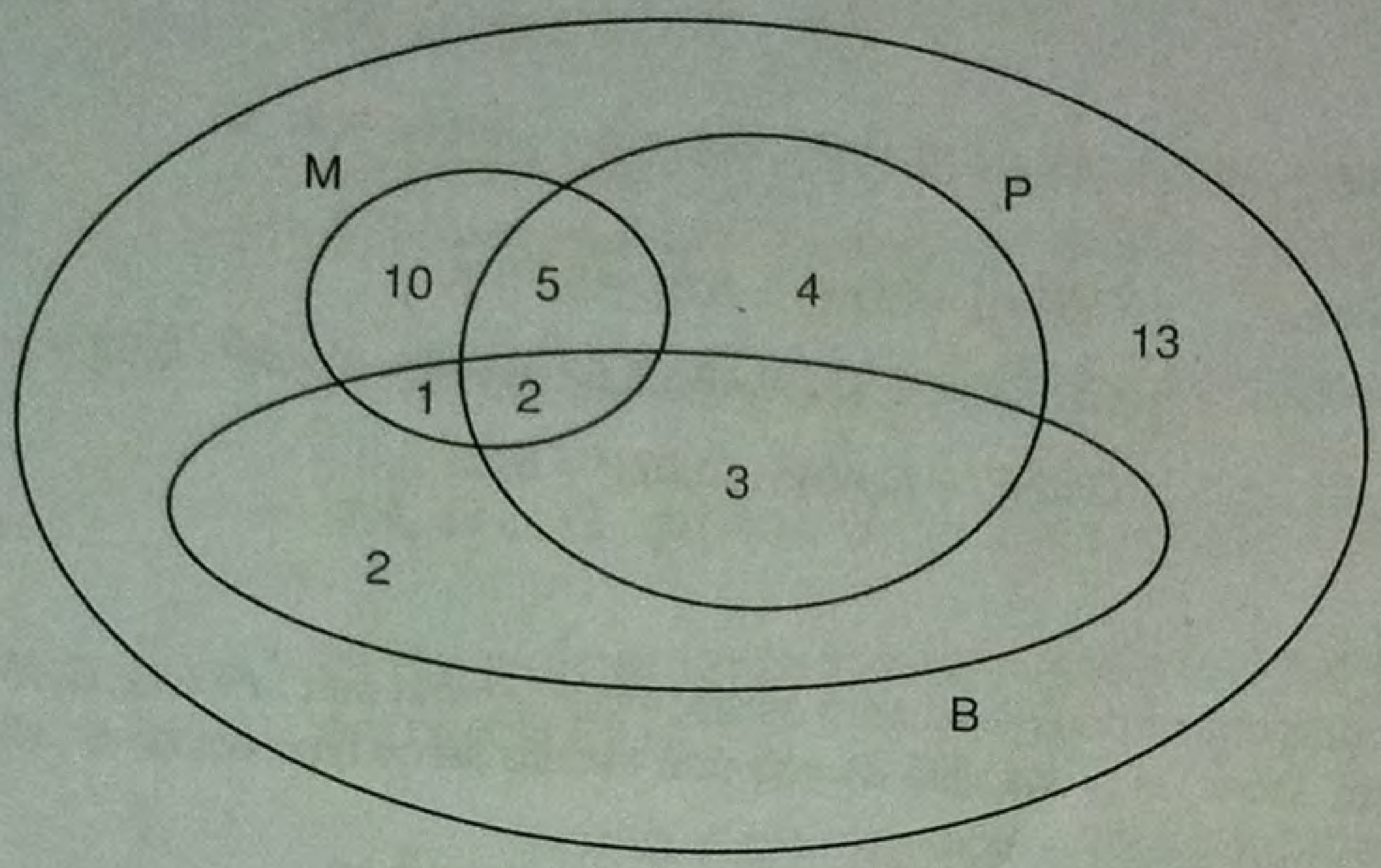
Exemple :

Dans un groupe de 40 élèves, 18 ont choisi l'option math 6 h, 14 l'option physique, 8 l'option biologie; 7 ont choisi à la fois math 6 h et physique, 5 biologie et physique, 3 math 6 h et biologie et enfin 2 élèves ont pris les 3 options.

Si on prend un élève au hasard, calculer la probabilité des événements suivants :

- A "l'élève suit l'option math 6 h",
- B "l'élève suit l'option physique",
- C "l'élève suit les options math 6 h ou physique",
- D "l'élève suit l'option physique mais pas math 6 h",
- E "l'élève n'a choisi ni physique, ni math 6 h, ni biologie",
- F "l'élève suit uniquement l'option biologie".

Représentons les données sous forme d'ensemble.



On remarquera que pour remplir ce diagramme, on notera d'abord les élèves qui ont choisi les 3 options. Ensuite, pour noter les élèves qui ont choisi math 6 h et physique, on n'oubliera pas qu'on a déjà inscrit deux élèves (ceux qui ont choisi les 3 options) : il n'en reste donc que 5 qui ont choisi math 6 h, physique mais pas biologie. On procède de même pour les autres parties d'ensembles à remplir.

Les réponses à nos questions se lisent alors facilement sur ce diagramme :

$p(A) = \frac{18}{40} = 45\ \%$, $p(B) = \frac{14}{40} = 35\ \%$, $p(C) = \frac{25}{40} = 62{,}5\ \%$,

$p(D) = \frac{7}{40} = 17{,}5\ \%$, $p(E) = \frac{13}{40} = 32{,}5\ \%$, $p(F) = \frac{2}{40} = 5\ \%$.

Probabilités : Synthèse

Définitions et propriétés

Soit un phénomène fortuit de catégorie d'épreuve Ω, alors on définit la probabilité des événements de ce phénomène fortuit par :

Définition	$p : \Omega \to [0\,,\,1] : A \to p(A)$ telle que : • $p(\Omega) = 1$ • $\forall A, B \subset \Omega \mid A \cap B = \varnothing : p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
Conséquences et propriétés	• $p(\varnothing) = 0$ • La somme des probabilités de tous les événements élémentaires de Ω vaut 1. • La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires contenus dans A. • Si $\overline{A}$ est le complémentaire de A dans Ω, $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$ • $\forall A, B \subset \Omega : p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ • Si les événements élémentaires du phénomène fortuit sont équiprobables : $p(A) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables à l'événement } A}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{\# A}{\# \Omega}$

Probabilités conditionnelles et événements indépendants

Si B est un événement de probabilité non nulle, **la probabilité de A sachant que B s'est réalisé est**	$p(A \mid B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$
A et B sont **indépendants.**	• $p(A \mid B) = p(A)$ et $p(B \mid A) = p(B)$ • $p(A \cap B) = p(A)\,.\,p(B)$

Méthodes de calcul

1) Utilisation des définitions et propriétés de la loi de probabilité
2) Par dénombrement (si on a des événements élémentaires équiprobables)
3) En disposant les données en arbres (si on a des événements qui se produisent par phases successives)
4) En disposant les données dans des tableaux ou des ensembles (lorsqu'on doit tenir compte de plusieurs caractéristiques en même temps)

EXERCICES

Applications directes

Vocabulaire et notations

1. Lors d'un sondage d'opinion sur les intentions de vote pour un parti, on note les renseignements suivants sur une fiche :
   - le sexe de la personne interrogée,
   - la tranche d'âge de la personne interrogée : 35 ans ou moins (–) , 36 ans ou plus (+),
   - l'intention de vote : pour (P), contre (C), abstention (A).

   On tire une fiche au hasard.

   Savoir faire pour le CS.

   1) Écrire en extension :
      - la catégorie d'épreuve
      - les événements suivants : A "la fiche tirée est celle d'une femme",
        B "la fiche tirée est celle d'une personne ayant 35 ans ou moins",
        C "la fiche tirée est celle d'une personne qui votera contre ce parti".

   2) Écrire en extension puis dire ce que représentent les événements :
      $A \cap B$, $C \setminus A$, $\overline{B}$, $B \cup C$ et $A \cap B \cap C$.

   3) Exprimer les événements suivants en fonction de A, B et C :
      - D "la fiche tirée est celle d'une femme qui est contre ce parti",
      - E "la fiche tirée est celle d'un homme de plus de 35 ans",
      - F "la fiche tirée est celle d'une femme ou d'une personne de 35 ans ou moins",
      - G "la fiche tirée est celle d'une femme de moins de 35 ans qui ne votera pas contre".

Axiomes de Kolmogorov

2. Étant donné que A et B sont deux événements d'un même phénomène aléatoire tels que $p(A) + p(B) > 1$, quelles sont les affirmations ci-dessous qui sont vraies ?
   1) A et B sont nécessairement incompatibles. $A \cap B = \{\}$
   2) A et B ont nécessairement une intersection. $A \cap B \neq \{\}$
   3) L'un des événements A ou B est impossible. $P(A)=0$ ou $P(B)=0$
   4) Aucun de ces événements n'est impossible. $A \neq \{\}$ et $B \neq \{\}$
   5) Ces deux événements sont nécessairement impossibles. $A=\{\}$ $B=\{\}$
   6) L'un des événements A ou B est nécessairement certain. $A=\Omega$ ou $B=\Omega$ → Faux
   7) L'un des événements A ou B est nécessairement non certain. $A \neq \Omega$ ou $B \neq \Omega$ → Faux

3. On tire, successivement et avec replacement, deux cartes d'un jeu de 32 cartes et on observe leur couleur (♥, ♠, ♦, ♣).

   Savoir faire pour le CS.

   1) Écrire en extension :
      a) la catégorie d'épreuve Ω,
      b) l'événement A : "tirer deux piques",
      c) l'événement B : "tirer deux cartes noires",
      d) l'événement C : "tirer une carte noire et une carte rouge",
      e) l'événement D : "tirer un cœur et un trèfle",
      f) l'événement E : "ne pas tirer de carreau".
   2) Calculer la probabilité de chacun des événements A, B, C, D, E.

B

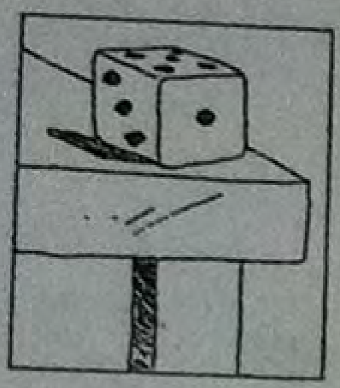
4. Benoît, Pierre, Marielle et Aurore organisent entre eux un jeu où il y a un seul gagnant.
Sachant que Benoît a 4 fois plus de chance de gagner que Marielle,
Pierre a 3 fois plus de chance de gagner que Marielle,
Aurore a la même chance de gagner que Pierre,
quelle est la probabilité qu'Aurore ne gagne pas ?

$\frac{255}{306}$

5. 

Une classe comporte 15 garçons dont un tiers a des lunettes et 18 filles dont la moitié a des lunettes. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard soit un garçon ou ait des lunettes ?

6. Lors d'un jet simultané de 2 dés discernables, quelle est la probabilité d'obtenir …



1) 2 fois le même point ?
2) au moins un 6 ?
3) 8 comme somme des deux points ? 2 6 | 3 5 | 4 4 | 5 3 | 6 2
4) au moins 10 comme somme des deux points ?

4+6 5+5 6+6 5+6 6+5 4+6 $\frac{6}{36}$ $\frac{1}{6}$

7. Si on jette 2 fois de suite une pièce et qu'on note si elle retombe côté pile ou côté face, quelle est la probabilité des événements suivants :

A : "obtenir 2 faces" ?
B : "obtenir 2 côtés différents" ?
C : "obtenir au moins une fois face" ? $\frac{3}{18}$

8. Une urne renferme 10 boules blanches, 5 boules noires et 3 boules vertes.

1) On extrait 2 boules l'une après l'autre et sans remise. Calculer la probabilité des événements suivants :
A : "obtenir deux boules noires"
B : "obtenir deux boules blanches"
C : "obtenir une boule blanche puis une boule noire"
D : "ne pas obtenir deux boules vertes"

2) On extrait 3 boules l'une après l'autre et sans remise. Calculer la probabilité des événements suivants :
A : "obtenir trois boules noires"
B : "obtenir une blanche puis deux noires"

3) On extrait 2 boules l'une après l'autre avec remise de la première boule après le premier tirage. Calculer la probabilité des événements suivants :
A : "obtenir deux boules noires"
B : "obtenir deux boules blanches"
C : "obtenir une boule blanche puis une noire"
D : "ne pas obtenir de boule verte"

4) On extrait 3 boules l'une après l'autre avec remise de chaque boule tirée.
Calculer la probabilité des événements suivants :
A : "obtenir trois boules noires"
B : "obtenir une blanche puis deux noires"

9. Quelle est la probabilité de tirer successivement deux as d'un jeu de 32 cartes ?

$\frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} = \frac{12}{992}$

10. Dans une urne A, il y a 2 boules noires et 3 boules blanches. Dans une urne B, il y a 5 boules noires et 2 boules blanches. On tire une boule de chaque sac, quelle est la probabilité d'avoir …

1) 2 boules blanches ?
2) 2 boules noires ?
3) 2 boules de couleurs différentes (calculer cette probabilité de deux manières différentes) ?

Probabilités conditionnelles – Événements indépendants

11. Les garçons d'un collège pratiquent les sports dans les proportions suivantes :

- football : 30 % d'entre eux,
- basket : 20 % d'entre eux,
- base-ball : 20 % d'entre eux,
- à la fois football et basket : 5 % d'entre eux,
- à la fois football et base-ball : 10 % d'entre eux,
- à la fois basket et base-ball : 5 % d'entre eux,
- les trois sports : 2 % d'entre eux.

1) On interroge un garçon pris au hasard. Quelle est la probabilité que ce soit …
   - un sportif ?
   - uniquement un footballeur ?
   - un joueur de football ou de base-ball ?

2) On choisit un sportif au hasard. Quelle est la probabilité que ce soit un footballeur uniquement ?

12. Un club sportif compte 80 inscrits en natation, 95 en athlétisme, 125 en gymnastique. Chaque inscrit pratique un seul sport.

Parmi les inscrits en natation, 45 % sont des filles. De même, 20 % des inscrits en athlétisme et 68 % des inscrits en gymnastique sont des filles.

1) On choisit un inscrit au hasard.
   - Quelle est la probabilité que ce soit une fille pratiquant l'athlétisme ?
   - Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?
2) On choisit une fille au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle pratique l'athlétisme ?

13. Sachant que 55 % de la population est féminine et que 5 % des hommes et 2 % des femmes ont une taille dépassant 1,85 m, quelle est la probabilité qu'une personne prise au hasard parmi celles dont la taille dépasse 1,85 m …

1) soit un homme ?
2) soit une femme ?

14. Un sondage d'opinion a donné les résultats suivants :

Réponses	Hommes	Femmes
Oui	62	51
Non	15	37
Sans avis	23	12

Quelle est la probabilité pour que ...

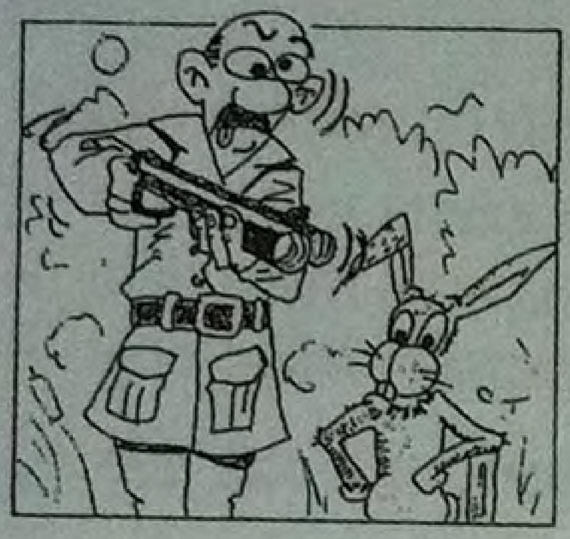
1) la réponse soit non si la personne est une femme ?
2) la réponse d'un homme soit non ?
3) une réponse sans avis soit celle d'un homme ?

15. Mme Bertrand, professeur de Français oublie souvent ses clefs en classe. Cela lui arrive :

- une fois sur deux lorsqu'elle ne les a pas oubliées la veille,
- une fois sur trois si elle les a laissées en classe la veille.

Ce lundi, elle a repris ses clefs à la fin du cours. Quelle est la probabilité qu'elle ne les oublie pas non plus jeudi sachant qu'elle va à l'école tous les jours ?

16. Dans une urne, il y a 2 boules noires et 3 boules blanches. On tire 2 boules sans replacement. Les événements *A* "la première boule est noire" et *B* "la deuxième boule est noire" sont-ils indépendants ?

17. 

Deux chasseurs *A* et *B* tirent un lapin. La probabilité pour *A* de tuer le lapin est de 0,7, celle de *B* est de 0,5. S'ils tirent en même temps, quelle est la probabilité que le lapin soit tué ?

18. Deux étudiants cherchent la solution d'un problème sans se consulter.
Le premier a une probabilité de 0,8 et le second une probabilité de 0,3 de trouver la solution. Quelle est la probabilité que le problème ne soit pas résolu ?

Vue d'ensemble

19. On suppose, qu'à chaque naissance, la probabilité d'avoir un garçon est de 52 % et celle d'avoir une fille est de 48 %.

1) Décrire la composition des familles de trois enfants et calculer la probabilité de chaque composition.
2) Dans les familles de trois enfants, calculer la probabilité des événements suivants :
   - *A* : "le deuxième enfant est une fille, le troisième un garçon"
   - *B* : "il y a moins de deux filles"
   - *C* : "tous les enfants sont du même sexe"
   - *D* : "il n'y a aucune fille"
   - *E* : "il y a exactement une fille"
   - *F* : "il y a exactement deux filles"
   - *G* : "il y a exactement trois filles"
   - *H* : "il y a moins de deux garçons"
3) Un couple désirant avoir trois enfants serait déçu avec moins de deux filles ou avec les trois enfants du même sexe. Quelle est la probabilité qu'il soit ...
   - déçu ?
   - doublement déçu ?
4) Pour être certain d'avoir un garçon, un couple décide d'avoir cinq enfants. Quelles sont ses chances de succès ?
5) Un couple désire avoir au moins un garçon et une fille mais, en tout cas, pas plus de 4 enfants.
   a) Quelle est la probabilité qu'ils doivent avoir 3 enfants avant d'avoir un garçon et une fille ?
   b) Quelle est la probabilité qu'après 4 enfants, ils n'aient toujours pas d'enfants des deux sexes ?

6) Dans une famille de trois enfants, quelle est la probabilité ...

a) que tous les enfants soient du même sexe sachant que la famille a moins de deux filles ?

b) qu'il y ait au moins deux filles sachant qu'il y a au moins une fille ?

c) qu'il y ait au moins deux filles sachant que l'enfant le plus âgé est une fille ?

20. Le sang humain est classé en 4 groupes sanguins distincts : A, B, AB et O. Indépendamment du groupe, le sang peut posséder le facteur rhésus. Si c'est le cas, on dira qu'il est positif (noté Rh+); Dans le cas contraire, on dira qu'il est négatif (noté Rh–). Statistiquement, sur une population, les groupes sanguins se répartissent comme suit :

A	B	AB	O
40 %	10 %	5 %	45 %

Et pour chaque groupe sanguin, la proportion d'individus ayant le facteur rhésus se répartit en :

Groupe	A	B	AB	O
Rh+	82 %	81 %	83 %	80 %
Rh–	18 %	19 %	17 %	20 %

Quelle est la probabilité pour qu'un individu pris au hasard ...

- ait le groupe sanguin O ? O^- ? A^+ ? AB^- ?
- soit de Rhésus négatif ?
- soit du groupe O sachant qu'il est de Rhésus négatif ?

Les événements *P* "être de Rhésus positif" et *B* "être de groupe sanguin B", sont-ils indépendants ?

21. D'une boîte de 20 pralines comprenant 10 pralines à la liqueur, 8 au massepain et 2 au chocolat, une personne en tire successivement 3 au hasard. Quelle est la probabilité pour

1) qu'elle tire dans l'ordre une praline au chocolat, une au massepain et une à la liqueur ?
2) que les 3 pralines tirées soient de même nature ?
3) qu'elle tire une praline à la liqueur et deux au massepain ?
4) que les trois pralines soient de natures différentes ?

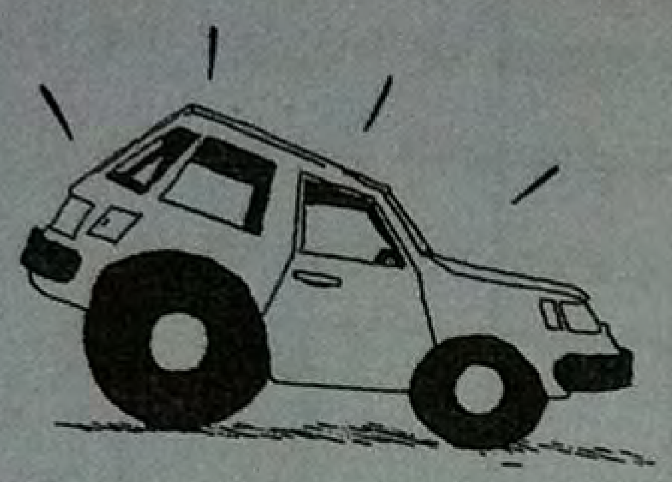
22. Une bourse *A* contient 6 pièces : 4 de 5 cents et 2 de 20 cents.
Une bourse *B* contient 6 pièces : 3 de 5 cents et 3 de 20 cents.

On prend au hasard une bourse (on a deux fois plus de chances de choisir la bourse *B* que la bourse *A*) et dans celle-ci une pièce. Quelle est la probabilité ...

1) de tirer une pièce de 5 cents ?
2) de tirer une pièce de 20 cents ?
3) que cette pièce vienne de *B* sachant que c'est une pièce de 20 cents ?
4) d'obtenir au moins 25 cents en deux pièces venant de *A*, lorsqu'on tire une bourse au hasard et ensuite deux pièces sans remise ?

23. Sabine et Marie passent un examen oral avec des probabilités respectives de réussite égales à $\frac{5}{7}$ et $\frac{3}{4}$. Quelle est la probabilité que ...

1) Sabine échoue ?
2) Sabine et Marie réussissent toutes les deux ?
3) Sabine réussisse et Marie échoue ?
4) Sabine et Marie échouent toutes les deux ?
5) une des deux au moins réussisse ?

24. 

Lors du montage d'une auto, il y a une probabilité de 3 % d'un défaut à la transmission, une probabilité de 4 % d'un défaut à la carrosserie et une probabilité de 6 % d'un défaut au moteur. Quelle est la probabilité pour que le contrôle à la sortie de la chaîne de montage s'exerce sur une voiture ...

1) ayant un défaut dans chacun des 3 secteurs signalés ?
2) présentant un seul défaut ?

25. On joue avec un dé avec les règles suivantes :

- si le point marqué est 6, on gagne 10 cents;
- si le point marqué est impair, on ne gagne ni ne perd rien;
- si le point marqué est 2 ou 4, on perd 6 cents.

Quelle est la probabilité de ne rien perdre lorsque l'on joue deux parties consécutives ?

26. On jette une pièce de monnaie jusqu'à ce qu'on obtienne pile une première fois. Quelle est la probabilité qu'on jette cette pièce ...

1) exactement 5 fois ?
2) moins de 5 fois ?
3) plus de 5 fois ?

27. Dans une pièce, il y a 6 couples mariés. On choisit un homme et une femme au hasard, quelle est la probabilité qu'ils soient mari et femme ?

28. La probabilité qu'un tireur atteigne une cible est $\frac{1}{4}$.

1) Il tire 3 fois. Quelle est la probabilité que la cible ne soit pas atteinte ?
2) Combien de fois doit-il tirer pour que la probabilité que la cible soit atteinte au moins une fois soit supérieure à 0,8 ?

29. On joue trois fois à "pile ou face" avec une pièce bien équilibrée. Étudier l'indépendance de :

1) *A* : "On obtient trois fois le même côté"
   B : "On obtient face au moins une fois"

2) *A* : "On obtient face au moins deux fois"
   B : "Lors des 3 jets, deux jets consécutifs donnent des résultats différents"

30. On dispose de trois dés à six faces, parfaitement équilibrés. Sur le premier, deux faces sont bleues, sur le deuxième, trois faces sont bleues, sur le troisième, cinq faces sont bleues; toutes les autres faces sont rouges.

1) On considère seulement le premier dé. On le lance 5 fois de suite. Les lancers sont indépendants. Quelle est la probabilité d'obtenir ...
   a) 4 fois une face bleue et 1 fois une face rouge dans cet ordre ?
   b) 4 fois une face bleue et 1 fois une face rouge ?
   c) au moins une face bleue ?

2) On considère les trois dés.

a) On en prend un au hasard et on le lance. Quelle est la probabilité d'obtenir une face bleue ?

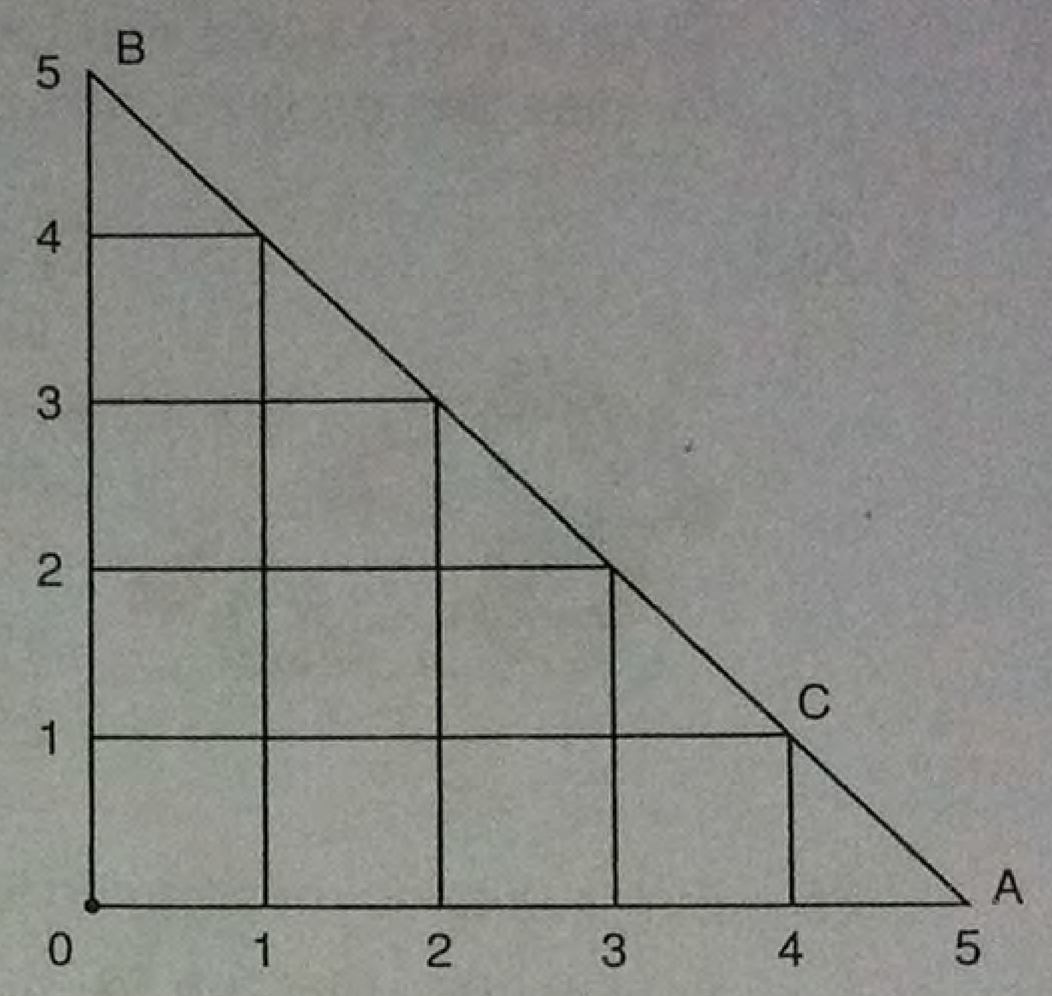
b) Sachant qu'on a obtenu une face bleue, quelle est la probabilité d'avoir lancé le troisième dé ?

31. On joue à "pile ou face" avec une pièce de monnaie non truquée. Au début du jeu, un pion se trouve placé au point $(0\ ,\ 0)$ de la grille.

Si on obtient pile, le pion est déplacé d'un pas vers la droite, c'est-à-dire passe du point $(x\ ,\ y)$ au point $(x+1\ ,\ y)$.

Si on obtient face, le pion est déplacé d'un pas vers le haut, c'est-à-dire passe du point $(x\ ,\ y)$ au point $(x\ ,\ y+1)$.

Après 5 lancers, le pion se trouve donc sur la droite AB.



1) Quelle est la probabilité d'arriver en $A\,(5\ ,\ 0)$?

2) Quelle est la probabilité d'arriver en $C\,(4\ ,\ 1)$?

3) Quelles sont les coordonnées des points d'arrivée les plus probables ?

32. Un automobiliste traverse chaque jour trois carrefours munis de feux. On considère les événements ...

A : "parmi les feux qu'il rencontre, l'un est vert et les deux autres sont rouges",
B : "parmi les feux qu'il rencontre, l'un est rouge et les deux autres sont verts",
C : "il rencontre trois feux verts".

On donne les probabilités de ces événements : $p(A) = 0{,}3$; $p(B) = 0{,}5$; $p(C) = 0{,}1$

1) Quelle est la probabilité que l'automobiliste rencontre ...

- au moins deux feux verts ?
- au moins deux feux rouges ?

2) Quelle est la probabilité qu'il ait rencontré au moins un feu vert sachant qu'au moins un des feux rencontrés était rouge ?

33. Dans une population, 99 % des individus ont été vaccinés contre une certaine maladie. Parmi les personnes vaccinées, il y a 20 fois moins de personnes atteintes par cette maladie que parmi les personnes non vaccinées. Quelle est la probabilité qu'une personne atteinte de la maladie n'ait pas été vaccinée ?

34. 

Des parachutistes débutants sautent d'un avion et atterrissent sur un terrain d'un hectare constitué de la façon suivante :

- une cible circulaire de 60 m de diamètre,
- un champ de luzerne rectangulaire de 80 m de long et 50 m de large,
- une mare d'une superficie de 800 m^2,
- le reste est en friche.

On assimile un parachutiste à un point matériel et on suppose que la probabilité qu'un parachutiste débutant tombe sur une partie du terrain est proportionnelle à l'aire de cette partie du terrain.

c) 0 ou 1 honneur seulement ?

d) pas la dame de pique ?

e) les 4 as mais aucun 7 ?

f) toutes les cartes de même teinte (c'est-à-dire soit rouges, soit noires) ?

g) 2 cartes noires seulement ?

2) Combien y a-t-il de possibilités que **chaque** joueur ait ...

a) 8 cartes quelconques (c'est-à-dire combien de possibilités au total) ?

b) autant de rouges que de noires ?

c) toutes les cartes de même teinte (c'est-à-dire soit rouge, soit noire) ?

d) toutes les cartes de la même valeur ?

e) 1 as ?

35. Combien de signaux un bateau peut-il envoyer ...

1) s'il possède 7 pavillons différents et si un signal est formé de 5 drapeaux disposés verticalement sur un mât dans un ordre donné ?

2) s'il possède 6 pavillons et si un signal est formé de 4 pavillons rouges et 2 pavillons bleus, les pavillons étant alignés ?

36. **Itinéraire**

Combien de circuits passent par *n* villes ? On ne passe qu'une fois par chaque ville et on finit le parcours en revenant à la première ville. On ne tient pas compte du sens de parcours.
Application numérique : combien y a-t-il de circuits pour 16 villes ?
Remarque : Le problème du voyageur de commerce consiste à trouver le plus court de ces circuits.

Exercices de probabilité nécessitant l'analyse combinatoire

37. **Circuit touristique**

Une agence de voyages propose un circuit touristique comprenant quatre des douze capitales de l'ancienne Communauté économique européenne (CEE, ex-Union européenne).
Pour définir un circuit, on suppose que chaque capitale n'est visitée qu'une fois et on tient compte de l'ordre de visite de ces capitales. Par exemple, le circuit : «Paris - Madrid - Rome - Athènes» diffère du circuit «Athènes - Rome - Paris - Madrid».
On suppose que chaque capitale a la même probabilité d'être choisie.
Combien y a-t-il de circuits différents ?
Dans la suite, les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.

1) Calculer la probabilité de l'événement suivant : «le circuit commence à Paris».

2) Si le circuit commence à Paris, quelle est la probabilité pour que Madrid et Rome fassent partie du circuit ?

38. **Urne**

Une urne contient cinq boules blanches et trois boules rouges indiscernables au toucher.

1) On tire successivement, sans remise, trois boules dans l'urne.
   a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   b) Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules rouges ?
   c) Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules rouges ?
2) Reprendre la première question, en supposant que les trois boules sont tirées simultanément. Comparer les résultats obtenus dans les deux questions.

39. **Code secret**

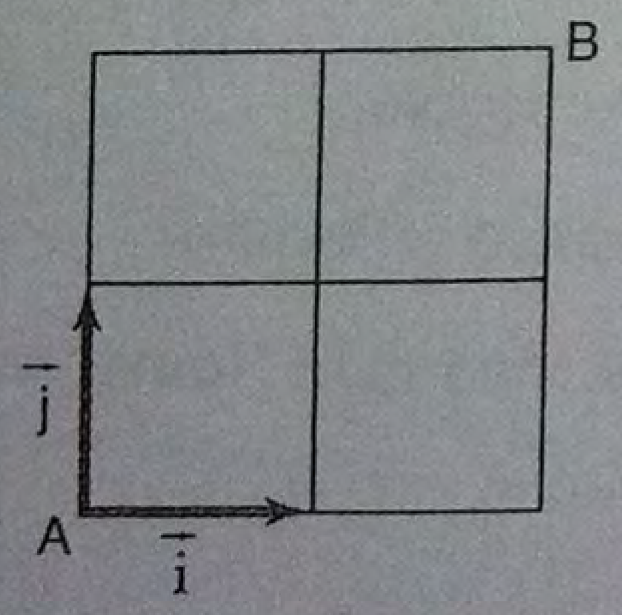
Une porte est munie d'un clavier portant les touches 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C et D. La porte s'ouvre lorsque l'on frappe dans l'ordre 3 chiffres et 2 lettres qui forment un code. Les chiffres sont distincts, les lettres peuvent être identiques. On suppose dans tout l'exercice que les manipulateurs connaissent le mode d'emploi du dispositif.

1) Quelle est la probabilité pour qu'une personne ouvre la porte au 1er essai si ...
   a) elle ignore le code ?
   b) elle se souvient seulement que les 3 chiffres du code sont pairs ?
   c) elle se souvient, en outre, que les deux lettres sont identiques ?
2) La porte est équipée d'un système d'alarme se déclenchant lorsqu'aucun des 3 chiffres tapés ne fait partie du code. Un enfant ignorant le code tente de déclencher l'alarme.
   a) Quelle est la probabilité pour qu'il provoque l'alarme au premier essai ?
   b) Il effectue 4 essais successifs et indépendants. Quelle est la probabilité pour qu'il déclenche l'alarme au moins une fois au cours des 4 essais ?

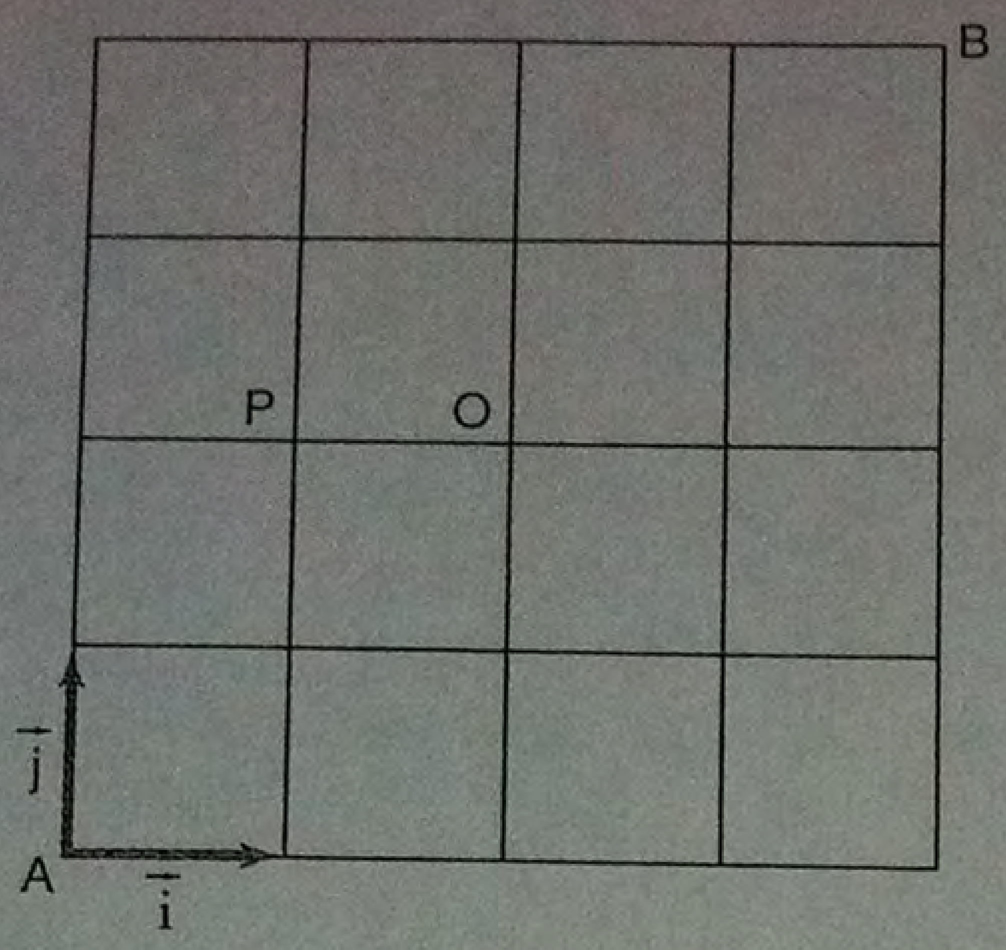
40. Les lettres du mot «TERMINAL» sont inscrites sur 8 plaquettes.
On tire au hasard, successivement et sans remise, 4 plaquettes que l'on dispose devant soi, de gauche à droite, dans l'ordre du tirage. On obtient ainsi un «mot» de quatre lettres ayant un sens ou non.

1) Combien de «mots» différents peut-on former ?
2) Quelle est la probabilité pour que le «mot» soit écrit avec quatre consonnes ?
3) Quelle est la probabilité pour que le «mot» comporte au moins une voyelle ?
4) Quelle est la probabilité pour que le «mot» comporte exactement trois voyelles ?

41. **Grilles**



1) Sur ce quadrillage 2 x 2, un chemin minimal de A vers B est la succession de 4 vecteurs $\vec{i}$ ou $\vec{j}$ dont la somme est $\overrightarrow{AB}$. Combien y a-t-il de chemins minimaux différents de A vers B ?

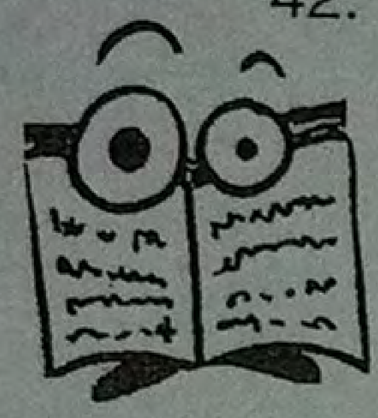


2) Sur ce quadrillage 4 x 4, combien y a-t-il de chemins minimaux de A vers B ?

3) Quelle est la probabilité pour qu'un chemin minimal choisi au hasard ...

a) passe par O centre du quadrillage ?

b) passe par P (1 , 2) ?



42. En remplissant un multiplus 13, un joueur a obtenu 5 numéros exacts **et** le complémentaire.

1) Combien a-t-il payé sa grille ?

2) Compléter le tableau suivant indiquant par combien il convient de multiplier chacun de ses gains et justifier.

Rang	Coefficient multiplicateur
1	
2	
3	
4	
5	

Exercices dirigés

43. **Bracelets** [1]

Démontrer qu'avec n perles de couleurs différentes, on peut former $\frac{(n-1)\,!}{2}$ bracelets différents.
Il faut raisonner par récurrence.

1) Avec 3 perles de couleurs différentes, combien de bracelets peut-on faire ?

2) Supposons qu'avec n perles de couleurs différentes on peut fabriquer $\frac{(n-1)\,!}{2}$ bracelets différents et prouvons qu'avec $(n+1)$ perles, on pourra en fabriquer $\frac{((n+1)-1)\,!}{2} = \frac{n\,!}{2}$ différents.

[1] Voir l'exemple 2, p. 132